ZESZYTY NAUKOWE UNIWERSYTETU SZCZECIŃSKIEGO
NR 760 FINANSE, RYNKI FINANSOWE, UBEZPIECZENIA NR 59 2013

JERZY TYMIŃSKI

EKONOMICZNA OCENA EFEKTYWNOŚCI PROCESÓW GOSPODARCZYCH PODMIOTU RYNKOWEGO A VAR

Słowa kluczowe: ekonomiczna efektywność, ryzyko, VaR, metody szacowania

Keywords: economic effectiveness, risk, VaR, estimation methods

Klasyfikacja JEL: G32

Wprowadzenie

W każdej działalności gospodarczej występuje ryzyko, czasem tak duże, że zagraża egzystencji firmy. Ryzyka nie da się całkowicie wyeliminować, jednak można je w odpowiedni sposób analizować, kontrolować, kwantyfikować, a poprzez jego kwantyfikację – podjąć próbę zarządzania nim.

Nadrzędnym celem procesu zarządzania ryzykiem jest ochrona podmiotu firmy przed nieakceptowanym poziomem strat. Wzrost ryzyka procesów biznesowych, w szczególności decyzji ekonomicznych, wynika m.in. z nowych tendencji w obszarze inwestycji kapitałowych. Zarządzanie ryzykiem staje się przejawem filozofii działania przedsiębiorstwa i wymaga stosowania nowoczesnych metod zarządzania.

Narzędziem o szczególnej przydatności w ocenie skali ryzyka jest *VaR* (*Value at Risk*). *VaR* jest miarą określającą wartość zagrożoną i może dotyczyć środków ekonomiczno-finansowych, koniecznych do zabezpieczenia realizowanych inwestycji i uniknięcia strat przez inwestora. Ze względu na uniwersalność, *VaR* może być wykorzystana do pomiaru i oceny ryzyka w różnych obszarach działalności gospodarczej.

Celem artykułu jest propozycja wykorzystania *VaR* do oceny ekonomicznej efektywności podmiotu gospodarczego.

Istota *VaR*

VaR sprowadza się do oceny straty, której poniesienie z określonym prawdopodobieństwem, w przyjętym okresie jest równe z góry ustalonemu poziomowi tolerancji α. Zazwyczaj przyjmuje się $\alpha \in <1\%, 5\%>$, przy czym im jest ono niższe, tym wyższa jest wartość ryzykowna. Metodologia wyznaczenia *VaR* – mimo że jest dość złożona – zawiera ogólne

zasady postępowania, ale i tak decydent napotyka na wiele problemów, których sposób rozwiązania ma zazwyczaj istotny wpływ na otrzymany wynik.

Sposób kalkulacji *VaR* – przegląd metod

Sposób kalkulacji *Value at Risk* można sprowadzić do następujących kroków:
- gromadzenia informacji dotyczących obecnych pozycji na wszystkich rachunkach (włączając w to pozycje wzajemnie się zabezpieczające),
- obserwacji wahań cen tych pozycji w określonym czasie w przeszłości (np. 360 dni) i wyliczenia ich zmienności,
- ustalenia poziomu ufności, który zostanie przyjęty w obliczeniach,
- przystąpienia do procesu kalkulacji *VaR*.

Wartość *VaR* określana jest za pomocą kwantyla rozkładu stopy zwrotu bądź też – w przypadku rozkładu normalnego – poprzez odchylenie standardowe rozkładu.

Należy dodać, że niekiedy problemem jest szacowanie kwantyla rozkładu. Istotne znaczenie ma więc zastosowanie właściwych procedur obliczeniowych. Praktyczne zastosowanie mają tu m.in. następujące metody analizy[1]:
- wariancji-kowariancji,
- symulacji historycznej,
- symulacji Monte Carlo.

W metodzie wariancji-kowariancji (*variance-covariance method*) najczęściej przyjmuje się założenie, że rozkład stopy zwrotu jest normalny. Wykorzystuje się wówczas formułę:

$$VaR = c \times \sigma_R - E(R)W_0,$$

gdzie:

c – stała określająca poziom ufności,
σ_R – odchylenie standardowe stopy zwrotu,
$E(R)$ – wartość oczekiwana stopy zwrotu,
W_0 – wartość zmiennej początkowego okresu badanego.

Konieczne jest określenie odchylenia standardowego oraz oczekiwanej stopy zwrotu w oparciu o dane historyczne.

Metoda symulacji historycznej (*historical simulation method*) sprowadza się do wykorzystania stóp zwrotu instrumentu finansowego (np. portfela akcji) w ujęciu historycznym. W praktyce najczęściej przyjmuje się dzienne historyczne stopy zwrotu. Przydatność praktyczna metody symulacji historycznej jest duża, o ile historyczne stopy zwrotu pozwa-

[1] *Zarządzanie ryzykiem*, red. K. Jajuga, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2009, s. 102–103; J. Tymiński: *Teoretyczne i praktyczne aspekty koncepcji wartości zagrożonej*, Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego nr 690, Szczecin 2012, s. 135.

lają na określenie empirycznego rozkładu. Umożliwia to oszacowanie kwantyla rozkładu i wyznaczenie wartości zagrożonej, jednakże jej skuteczność jest uwarunkowana niezmiennością stóp zwrotu.

Metoda symulacji Monte Carlo (*Monte Carlo simulation*) jest metodą najbardziej złożoną numerycznie. W pierwszej kolejności konstruuje się odpowiedzi na podstawie wiedzy teoretycznej bądź empirycznej, zaczerpniętej z przeszłości, o rozważanych stopach zwrotu (Chyliński, 1999). Umożliwia to konstrukcję hipotetycznego modelu odzwierciedlającego kształtowanie się stóp zwrotu w postaci:

$$R = \mu + \sigma\varepsilon,$$

gdzie

μ – parametr modelu, zwany dryfem,

σ – parametr określający zmienność R,

ε – zmienna losowa, zwana niezależnym szumem losowym o rozkładzie $N(0, \sigma_\varepsilon)$.

W oparciu o przyjęty model generuje się wartości stóp zwrotu, celem oszacowania ich empirycznego rozkładu, co umożliwia m.in. wyznaczenie kwantyla rozkładu. Pozwala to na określenie wartości zagrożonej VaR[2].

Dla określenia wartości zagrożonej można zastosować formułę postaci:

$$P(W \leq W_0 - VaR) = \alpha,$$

lub

$$P(W > W_0 - VaR) = 1 - \alpha,$$

gdzie:

VaR – wartość zagrożona w rozpatrywanym okresie,

P – prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia,

W_0 – wartość zmiennej na początku okresu (wartość pojedynczego instrumentu finansowego lub portfela, albo wartość netto podmiotu gospodarczego w chwili 0),

W – wartość zmiennej na koniec okresu (wartość pojedynczego instrumentu finansowego portfela, albo wartość netto podmiotu gospodarczego na końcu analizowanego okresu),

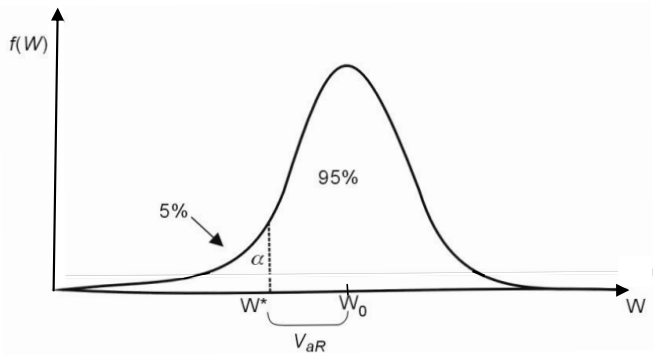
α – poziom tolerancji.

Rozpatrywana zależność oznacza, że wartość W na koniec okresu będzie równa co najwyżej wartości obecnej W_0, pomniejszonej o VaR, z prawdopodobieństwem równym przyjętemu poziomowi tolerancji.

Na rysunku 1 przedstawiono ilustrację wartości zagrożonej. Na osi odciętych zaznaczone są wartości zmiennej na zakończenie rozpatrywanego okresu, natomiast oś rzędnych

[2] *Zarządzanie ryzykiem...*

przedstawia wartości funkcji gęstości zmiennej *W*. Przez *W** oznaczono najniższą wartość zmiennej, zwaną też kwantylem rozkładu, która dzieli powierzchnię pola, znajdującą się pod wykresem *f*(*W*), na dwie części. Odpowiadają one przyjętemu poziomowi tolerancji (w prowadzonych rozważaniach $\alpha = 5\%$). *VaR* określająca wolumen straty jest różnicą pomiędzy obecną wartością zmiennej W_0 a kwantylem rozkładu *W**. Dla przyjętego horyzontu czasowego jednego miesiąca, *value at risk* oznacza maksymalne zmniejszenie wartości zmiennej *W*, jakie może nastąpić w ciągu 30 dni, na poziomie tolerancji 5%. Innymi słowy, straty większe od wartości *VaR* powinny występować w ciągu jednego miesiąca nie częściej niż w 5% przypadków.



Rysunek 1. Ilustracja wartości zagrożonej

Źródło: opracowanie własne na podstawie: *Zarządzanie ryzykiem*..., s. 100.

W zależności od metody kalkulacji, wartość zagrożona może być zapisana w odmienny sposób. Jedna z metod wykorzystuje rzeczywisty rozkład stóp zwrotu, z którego bezpośrednio odczytywana jest *Value at Risk*, natomiast druga opiera się na upraszczającym założeniu, że rozkład stóp zwrotu jest normalny. Bez względu na metodę *Value at Risk*, miarę straty można określić jako wartość absolutną lub jako jej procentową wielkość w stosunku do wartości bazowej bądź w odniesieniu do wartości średniej portfela.

W przypadku określenia *VaR* jako wartości absolutnej, można przyjąć, że w ustalonym czasie:

$$VaR = W_0 - W^*,$$

gdzie:

W_0 – wartość zmiennej na początku ustalonego czasu,

W^* – wartość zmiennej na końcu ustalonego czasu.

Przytoczona formuła oznacza, że z prawdopodobieństwem równym poziomowi tolerancji α stopa zwrotu R przyjmie wartości nie większe od R_α. Kwantyl rozkładu stóp zwrotu można obliczyć wykorzystując wzory:

$$R_\alpha = \frac{W_\alpha - W_0}{W_0} \quad \text{lub} \quad R_\alpha = \ln \frac{W_\alpha}{W_0},$$

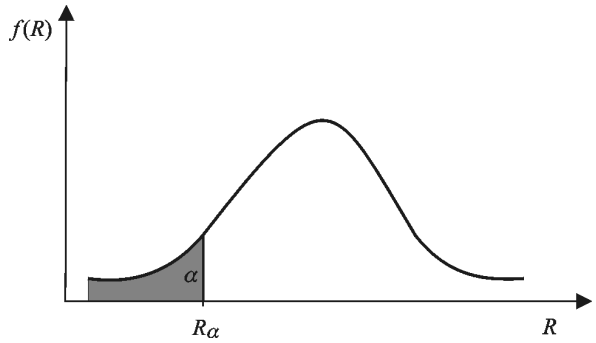
gdzie: $W\alpha = W_0 - VaR$.
Stąd:

$$VaR = -R_\alpha W_0$$

lub

$$VaR = W_0 (1 - e^{R\alpha}).$$

Formuła $VaR = W_0 (1 - e^{R\alpha})$ pozwala na „klarowne" wyznaczenie wartości VaR, pod warunkiem znajomości rozkładu stóp zwrotu oraz kwantyla rozkładu R_α, co zilustrowano na rysunku 2.



Rysunek 2. Wartość VaR dla R_α

Źródło: opracowanie własne.

VaR wiąże się z poziomem ufności dla najniższej możliwej stopy zwrotu R^*, czyli takiej stopy zwrotu, że prawdopodobieństwo osiągnięcia wartości R co najwyżej jej równej odpowiada przyjętemu poziomowi tolerancji:

$$P(R^* \leq R) = \alpha,$$

albo że prawdopodobieństwo, iż zostanie osiągnięta wartość R większa od R^* wynosi $1 - \alpha$:

$$P(R^* < R) = 1 - \alpha.$$

Jeśli dana jest funkcja rozkładu (funkcja gęstości) prawdopodobieństwa przyszłych wartości portfela $f(R)$ to można zapisać na mocy teorii całki oznaczonej Riemanna, że:

$$\alpha = \int_{-\infty}^{R^*} f(R)dR\alpha$$

oraz

$$1 - \alpha = \int_{R^*}^{+\infty} f(R)dR,$$

gdyż

$$\int_{-\infty}^{R^*} f(R)dR + \int_{R^*}^{+\infty} f(R)dR = 1.$$

Oznacza to, że miarę obszaru ograniczonego osią odciętych i krzywą $f(R)$ można rozdzielić na sumę: wartości VaR ($R \le R_\alpha$) oraz na pozostałą wartość R ($R > R_\alpha$).

Rozkład stopy zwrotu papieru wartościowego (bądź portfela) w zadanym czasie zilustrowano na rysunku 2. Zakreślony obszar, odpowiadający prawdopodobieństwu na poziomie α oznacza, że prawdopodobieństwo, iż wartości stopy zwrotu papieru wartościowego nie znajdą się poza kwantylem rozkładu stopy zwrotu R^*, będzie równe α. Można zatem zapisać przedział ufności dla $E(R)$ w postaci:

$$P\{E(R) - Z_\alpha \sigma_R \le E(R) \le E(R) + Z_\alpha \sigma_R\} = 1 - \alpha,$$

gdzie:

$E(R)$ – wartość oczekiwana stopy zwrotu,
Z_α – wartość z tablic rozkładu $N(0, 1)$,
σ_R – odchylenie standardowe stopy zwrotu R.

Zastosowanie algorytmu Monte Carlo do wyznaczenia wartości VaR można prześledzić na przykładzie z wykorzystaniem schematu blokowego przedstawionego na rysunku 3. Założenia proceduralne Monte Carlo dotyczą:

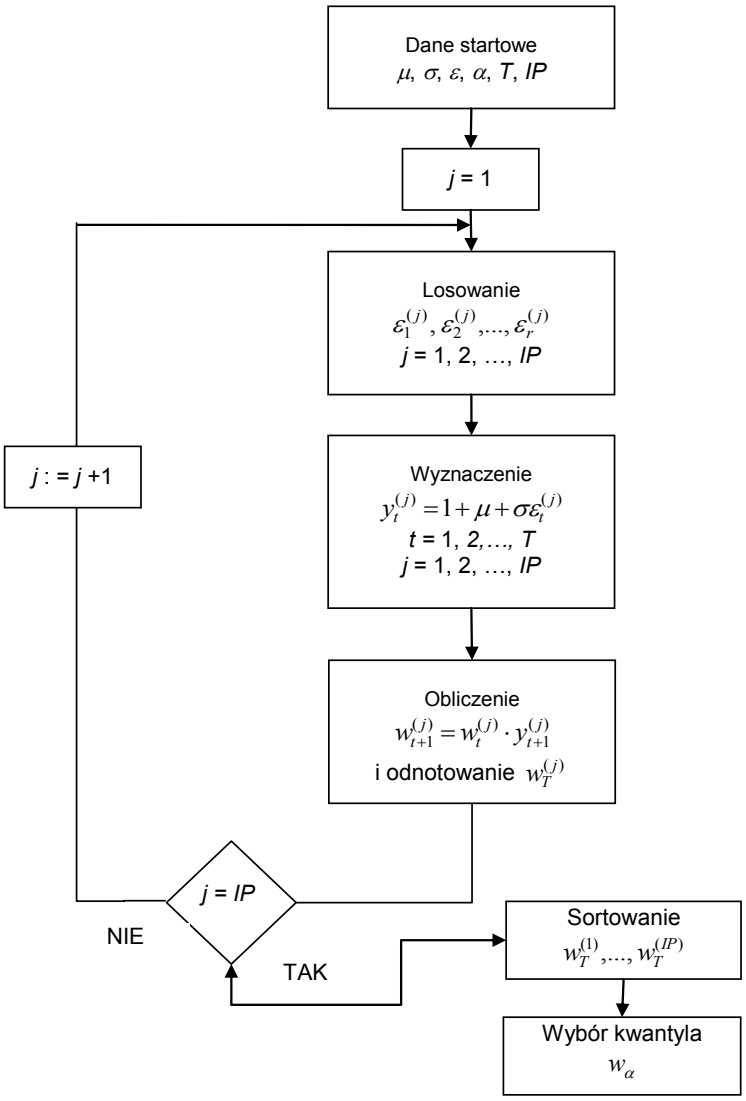
– przyjęcia modelu opisującego mechanizm kształtowania się stóp zwrotu,
– generowania najczęściej kilku tysięcy obserwacji stóp zwrotu.

Prowadzi to do określenia rozkładu dla stopy zwrotu, na podstawie którego wyznacza się kwantyl przyjętego rzędu, co pozwala ustalić wartość VaR.

Uwzględniając te założenia przyjęto, że dany jest papier wartościowy, którego stopy zwrotu są losowe i opisane za pomocą modelu:

$$\frac{W_{t+1} - W_t}{W_t} = \mu + \sigma\,\varepsilon, \quad t = 0, 1, 2, \ldots,$$

gdzie: W_t – wartość papieru w okresie t, ε jest zmienną losową o rozkładzie normalnym $N(0, 1)$; μ, σ są odpowiednio wartością oczekiwaną i odchyleniem standardowym dla stóp zwrotu.



Rysunek 3. Schemat blokowy metody Monte Carlo

Źródło: opracowanie własne.

Jako wartości parametrów μ, σ przyjęto wartość średnią i odchylenie standardowe dla tygodniowych stóp zwrotu dla WIG20 za okres od 3 stycznia 2000 do 7 stycznia 2010 roku, czyli $\mu = 0{,}002079\ (\cong 0{,}002)$ i $\sigma = 0{,}031387\ (\cong 0{,}031)$. Przyjmując dodatkowo, że początkowa wartość instrumentu wynosi 1000 zł, wyznaczono skończone T-elementowe ciągi wartości dla analizowanego instrumentu:

$$\begin{cases} W_{t+1}^{(j)} = W_t^{(j)}(1 + 0{,}002 + 0{,}031\varepsilon, & t = 0, 1, 2, ..., T-1, \\ W_0 = 1000, \end{cases}$$

gdzie symbol (j) oznacza numer losowanej próby (przyjęto, że $j = 1, 2, ..., 10\,000$).

W ten sposób powstał ciąg wartości empirycznych instrumentu po T okresach: $W_T^{(1)}, W_T^{(2)}, \ldots, W_T^{(10000)}$, na podstawie którego wyznaczono kwantyle rzędu α, czyli W_α dla $\alpha = 0{,}10; 0{,}05; 0{,}01$. W eksperymencie Monte Carlo przyjęto następujące długości okresów: $T = 6, 13, 26, 52$ tygodnie. Dla zagwarantowania porównywalności wyników losowania przyjęto dla prób taki sam start generatora liczb pseudolosowych.

Otrzymane rezultaty zamieszczono w tabeli 1.

Tabela 1

Wyniki symulacji Monte Carlo wartości zagrożonej VaR_α

T	Wartości	Wartości kwantyli W_α i wartości zagrożonej VaR_α dla		
		α = 0,10	α = 0,05	α = 0,01
Wartości teoretyczne	c_α	1,2816	1,6449	2,3263
	$VaR_c = (-\mu + c_\alpha\sigma)W_0$	37,7296	48,9919	70,1153
1	W_α	963,0760	951,2750	928,8780
	VaR_α	36,9240	48,7250	71,1220
6	W_α	915,4130	889,9150	845,2870
	VaR_α	94,5870	110,0850	154,7130
13	W_α	881,5470	846,8540	786,1660
	VaR_α	118,4530	153,1460	213,8340
26	W_α	847,9040	798,5660	719,6160
	VaR_α	152,0960	201,4340	280,3840
52	W_α	811,4870	746,3870	651,1260
	VaR_α	188,5130	253,6130	348,8740

Źródło: badania własne w pakiecie *Mathematica.*

Liczba c_α została wyznaczona z tablic statystycznych dla zmiennej losowej $X \sim N(0, 1)$ tak, aby $P(X) \leq -c_\alpha$ czyli z symetrii rozkładu normalnego i wynosi $P(X) \geq c_\alpha$.

Należy zauważyć, że wraz ze wzrostem poziomu tolerancji α, rosną wartości kwantyla W_α rozkładu wartości instrumentu do wartości W_0, tym samym maleją bezwzględne wartości VaR. Dla ustalonego poziomu tolerancji α, wraz ze wzrostem długości hipotetycznych okresów zwrotu, maleją wartości kwantyla W_α, zatem wartości bezwzględne VaR rosną.

Warto zwrócić uwagę, że wartości teoretyczne VaR_c, wyznaczone przy założeniu rozkładu normalnego dla stóp zwrotu, odpowiadają sytuacji, gdy okres zwrotu jest jednotygodniowy ($T = 1$). Występujące różnice między VaR_c a VaR_α (dla $T = 1$) wynikają z ograniczo-

nej liczby losowanych prób (tylko 10 000). Różnice są jednak na tyle małe, że można uznać, iż losowanie 10 000 prób jest wystarczające.

Metoda wartości zagrożonej umożliwia syntetyczny pomiar ryzyka w procesie oceny ekonomicznej efektywności podmiotu gospodarczego. Pozwala ona na określenie, z przyjętym prawdopodobieństwem, maksymalnej straty, jaką może ponieść inwestor w danym horyzoncie czasowym. Dzięki niej można prześledzić zmiany ryzyka wiążącego się ze składowymi elementami portfela. Techniki te pozwalają ocenić dywersyfikację portfela i adekwatność kapitałową oraz dokonać korekty efektywności działania o czynnik ponoszonego ryzyka, zarówno portfelowego, jak i na poziomie całej instytucji i jej poszczególnych działów.

Literatura

Best Ph.: *Wartość narażona na ryzyko. Obliczanie i wdrażanie modelu VAR*, Oficyna Wydawnicza ABC, Kraków 2000.

Zarządzanie ryzykiem, red. K. Jajuga, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2009.

Modelowanie preferencji a ryzyko, red. T. Trzaskalik, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Katowicach, Katowice 2001.

Tymiński J.: *Podstawy procesów decyzyjnych na rynku kapitałowym*, Wyd. Wyższa Szkoła Gospodarki Krajowej, Kutno 2011.

Tymiński J.: *Teoretyczne i praktyczne aspekty koncepcji wartości zagrożonej*, Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego nr 690, Szczecin 2012.

dr Jerzy Tymiński
prof. Wyższej Szkoły Gospodarki Krajowej w Kutnie

Streszczenie

Artykuł obejmuje problematykę oceny ekonomicznej efektywności podmiotu gospodarczego miarą *VaR*. *VaR* jest miarą ryzyka możliwą do zastosowania w każdym obszarze działalności podmiotu gospodarczego. Umożliwia kwantyfikację czynników ekonomicznych determinujących poziom ryzyka w poszczególnych obszarach. Techniki określające wartości *VaR* pozwalają ocenić dywersyfikację portfela także na rynku kapitałowym. Pozwalają też dokonać korekty działania podmiotu o czynnik ponoszonego ryzyka zarówno portfelowego, jak i na poziomie całego podmiotu.

Jest to miara złożona metodologicznie. Wymaga zastosowania trafnych kalkulacji do oszacowania jej wartości. Jedną z bardziej przydatnych metod jest metoda symulacji Monte Carlo, która pozwala precyzyjnie przybliżyć wartość *VaR*.

THE ECONOMIC EVALUATION OF THE EFFECTIVENESS OF MARKET ENTITY'S BUSINESS PROCESSES AND *VAR*

Summary

The article discusses the use of *VaR* for evaluating the economic effectiveness of a market entity. *VaR* is a measure of risk that allows economic determinants of risk related to particular business areas to be quantified and can be applied to any type of activity. *VaR* calculation techniques also enable the assessment of capital portfolio diversification, as well as the readjustment of business operations according to risk involved in the portfolio and the whole organization.

The measure is methodologically complex and precise calculations are needed to establish its value. One of the more useful methods is the Monte Carlo simulation method that yields relatively accurate values of *VaR*.