ZESZYTY NAUKOWE UNIWERSYTETU SZCZECIŃSKIEGO

NR 761 FINANSE, RYNKI FINANSOWE, UBEZPIECZENIA NR 60 2013

RYSZARD WĘGRZYN

ZASTOSOWANIE WYBRANYCH MODELI ZMIENNOŚCI W ANALIZIE RYZYKA CEN AKCJI

Słowa kluczowe: ryzyko, akcje, modele GARCH

Keywords: risk, stocks, GARCH models

Klasyfikacja JEL: G10

Wprowadzenie

Klasycznymi miarami ryzyka cen akcji, najpowszechniej stosowanymi i przywoływanymi w literaturze są miary zmienności. W tym względzie można wyróżnić trzy podejścia związane z szacowaniem zmienności[1]. Podejście pierwsze, najstarsze i najprostsze zarazem, polega na szacowaniu zmienności przez odchylenie standardowe (lub wariancję) z określonej próby zaobserwowanego szeregu stóp zwrotów. W podejściu drugim przyjmuje się, że dobrym oszacowaniem zmienności jest tzw. zmienność implikowana. Zmienność ta jest oparta na implikowanym odchyleniu standardowym (ISD, *implied standard deviation*), wyliczanym najczęściej z modelu wyceny opcji europejskiej Blacka-Scholesa. Podejście trzecie, najbardziej zaawansowane, polega na dopasowaniu parametrycznych modeli statystycznych (np. GARCH, SV) do szeregu zaobserwowanych stóp zwrotów.

Celem artykułu jest określenie charakterystyk oraz specyfikacji wybranych modeli zmienności, a także analiza wyników ich zastosowania w odniesieniu do wybranych indeksów giełdowych.

W opracowaniu przedstawiono wyniki zastosowania modeli ARMA, służących eliminacji zależności liniowych oraz modeli GARCH, APARCH oraz EGARCH, zarówno z normalnym warunkowym rozkładem błędu, jak i rozkładem *t*-Studenta i skośnym rozkładem *t*-Studenta. Analiza została przeprowadzona dla trzech indeksów giełdowych: WIG20, SP500 oraz FTSE250 i obejmowała okres 3.10.1994–31.10. 2012 roku. Do obliczeń został zastosowany program komputerowy Time Series Modelling v. 4.31.

---

[1] Zob. M. Pipień: *Wnioskowanie bayesowskie w ekonometrii finansowej*, Akademia Ekonomiczna w Krakowie, Kraków 2006, s. 47.

Charakterystyka wybranych modeli zmienności

W literaturze finansowej istnieje bardzo bogaty wachlarz różnego typu modeli wykorzystywanych do modelowania i prognozowania zmienności stóp zwrotu. W ostatnich 50 latach najpowszechniej używanymi modelami do analizy szeregów czasowych były liniowe modele gaussowskie. Ogólną reprezentację tych modeli stanowi model ARMA(p,q) (*autoregressive moving average*) o postaci:

$$r_t = a_0 + \sum_{j=1}^{p} a_j r_{t-j} + \varepsilon_t - \sum_{j=1}^{q} b_j \varepsilon_{t-j},$$

gdzie: r_t – oznacza logarytmiczną stopę zwrotu, a_0, a_j i b_j parametry modelu, a ε_t to niezależne i o tym samym rozkładzie zmienne losowe ze średnią zero i skończoną wariancją. Model ARMA(0,q) jest określany jako model średniej ruchomej rzędu q i oznaczany przez MA(q); natomiast model ARMA(p,0) jest modelem autoregresyjnym rzędu p, oznaczanym przez AR(p).

Podstawowym ustaleniem dla modelowania zmian w wariancji było określenie stopy zwrotu r_t jako sumy o postaci[2]:

$$r_t = \mu_t + \varepsilon_t,$$

gdzie μ_t oznacza średnią warunkową, opisywaną zazwyczaj za pomocą modelu ARMA(p,q), a ε_t innowację w średniej, określaną jako ciąg niezależnych i o tym samym rozkładzie (iid, ang. *independent and identically distributed*) zmiennych losowych z_t ze średnią zero i wariancją jeden, pomnożonych przez odchylenie standardowe σ_t:

$$\varepsilon_t = \sigma_t z_t.$$

R.F. Engle[3] zaproponował, aby wariancja była w tym wypadku modelowana jako warunkowa względem przeszłych obserwacji przy użyciu modelu autoregresyjnej heteroskedastyczności warunkowej (ARCH, *autoregressive conditional heteroscedasticity*). Najprostszą jego postacią jest:

$$\sigma_t^2 = \alpha + \beta \varepsilon_{t-1}^2, \quad \alpha > 0, \beta \geq 0.$$

Ograniczenia nałożone na parametry w tym modelu wiążą się z zapewnieniem dodatniej wariancji. Ważną własnością modeli ARCH jest ich zdolność uchwycenia skupisk zmienności w danych finansowych, tj. skłonności do tego, że duże (małe) zmiany w zwrotach następują po dużych (małych) zmianach przypadkowego kierunku.

[2] Zob. M. Doman, R. Doman: *Modelowanie zmienności i ryzyka. Metody ekonometrii finansowej*, Wolters Kluwer, Kraków 2009, s. 76–79.

[3] R.F. Engle: *Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of Variance of UK Inflation*, "Econometrica" 1982, Vol. 50.

Efekty ARCH zostały udokumentowane w literaturze finansowej między innymi przez V. Akgiraya[4] dla zwrotów indeksowych, G.W. Schwerta i P.J. Seguina[5] dla rynków transakcji terminowych oraz R.F. Engle'a i C. Mustafy[6] dla zwrotów z akcji pojedynczych spółek.

W przedstawionej prostej postaci modelu ARCH, warunkowa wariancja zależy od pojedynczej obserwacji. Dobrze jest rozłożyć pamięć procesu na wiele przeszłych obserwacji przez włączenie większej liczby opóźnień, w ten sposób uwzględniane zmiany w wariancji następują wolniej. To prowadzi do następującego sformułowania:

$$\sigma_t^2 = \alpha + \beta_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \cdots + \beta_p \varepsilon_{t-p}^2,$$

które oznacza model ARCH(p), gdzie $\alpha > 0$ i $\beta_i \geq 0$.[7] Włączając opóźnione wartości σ_t^2 otrzymujemy tak zwany uogólniony model ARCH:

$$\sigma_t^2 = \alpha + \beta_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \cdots + \beta_p \varepsilon_{t-p}^2 + \gamma_1 \sigma_{t-1}^2 + \cdots + \gamma_q \sigma_{t-q}^2,$$

gdzie dodatkowo $\gamma_i \geq 0$.

Model ten został po raz pierwszy zaproponowany przez T. Bollersleva[8] i S.J. Taylora[9] i określony jako GARCH(p,q) (*generalized autoregressive conditional heteroscedasticity*). Modyfikacja ta doprowadziła do redukcji liczby koniecznych do estymowania parametrów. W większości z empirycznych wdrożeń, wartości ($p \leq 2$, $q \leq 2$) są wystarczające by modelować zmienność, dając wystarczający kompromis pomiędzy elastycznością a zbytnią oszczędnością modelu.

W związku z pewnymi mankamentami, modele te podlegały kolejnym modyfikacjom. Z. Ding, C.W.J. Granger i R. Engle[10] zaproponowali model APARCH (*Asymmetric Power* ARCH) o postaci:

$$\sigma_t^\eta = \alpha + \sum_{i=1}^{q} \beta_i \left(|\varepsilon_{t-i}| - \mu_i \varepsilon_{t-i} \right)^\eta + \sum_{j=1}^{p} \gamma_j \sigma_{t-j}^\eta,$$

gdzie $\eta > 0$, $-1 < \mu_i < 1$.

W modelu tym istnieje możliwość dopasowania wykładnika η różnego od 2 oraz uwzględnienia asymetrii poprzez współczynniki asymetrii μ_i. Przy $\eta = 2$ i $\mu_i = 0$ model ten sprowadza się do standardowego modelu GARCH.

---

[4] V. Akgiray: *Conditional Heteroscedasticity in Time Series of Stock Returns: Evidence and Forecasts*, „Journal of Business" 1989, Vol. 62.

[5] G.W. Schwert, P.J. Seguin: *Heteroscedasticity in Stock Returns*, „Journal of Finance" 1990, Vol. 45.

[6] R.F. Engle, C. Mustafa: *Implied ARCH Models from Option Prices*, „Journal of Econometrics" 1992, Vol. 52.

[7] Zob.: R.F. Engle: *Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of Variance of UK Inflation*, „Econometrica" 1982, Vol. 50.

[8] T. Bollerslev: *Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity*, „Journal of Econometrics" 1986, Vol. 31.

[9] S.J. Taylor: *Modelling Financial Time Series*, J. Wiley, Chichester 1986.

[10] Z. Ding, C.W.J. Granger, R.F. Engle: *A Long Memory Property of Stock Market Returns and a New Model*, „Journal of Empirical Finance" 1993, Vol. 1.

Model APARCH(p,q) zaproponowany przez J. Davidsona[11] ma nieco inną postać:

$$\sigma_t^{\eta} = \alpha + \sum_{i=1}^{q} \beta_i \left(1 + \mu \ I\left(\varepsilon_{t-i} < 0\right)\right) \varepsilon_{t-i}^{\eta} + \sum_{j=1}^{p} \gamma_j \sigma_{t-j}^{\eta},$$

gdzie $\eta > 0$, $I(\varepsilon_{t-i} < 0) = 1$ dla $\varepsilon_{t-i} < 0$ w innym wypadku $I(\varepsilon_{t-i} < 0) = 0$.

Parametr μ (mi) jest to tak zwany parametr „dźwigni" (asymetrii), który powoduje, że dodatnie i ujemne innowacje wpływają inaczej na warunkową wariancję. Jeśli parametr $\mu > 0$, to ma to większy udział w wariancji, gdy $\varepsilon_t < 0$ niż w innym wypadku. Model w tej postaci został zastosowany w dalszej analizie.

Asymetria informacji jest potencjalnie przydatna, ponieważ wariancja może wówczas reagować szybciej na spadki na rynku niż na odpowiednie wzrosty. Jeszcze wcześniej B.D. Nelson[12] przedstawił model EGARCH (*Exponential* GARCH), umożliwiający σ_t^2 reagowanie asymetryczne na wzrosty i spadki w ε_t. Postać tego modelu dla $p = q = 1$ wygląda następująco:

$$\log \sigma_t^2 = \alpha + \beta_1 z_{t-1} + \beta_2 \left(\left|z_{t-1}\right| - E\left(\left|z_{t-1}\right|\right)\right) + \gamma_1 \log \sigma_{t-1}^2.$$

Zaletą tego modelu jest nie tylko uwzględnienie asymetrii, ale też to, że poprzez zastosowanie transformacji logarytmicznej nie wymaga on wprowadzania ograniczeń gwarantujących dodatniość wariancji warunkowej na parametry α, β_1, β_2, γ_1[13].

Model EGARCH został przedstawiony także w innej, znacznie bardziej rozbudowanej postaci przez J. Davidsona[14]. W jego modelu EGARCH efekt asymetrii mierzony jest parametrem v (ni). Należy jednak zauważyć, że znak tego parametru asymetrii ma odwrotną interpretację niż parametr μ w jego modelu APARCH. Jeśli $v > 0$, to ma to większy udział netto w wariancji, gdy $\varepsilon_t > 0$ niż w innym wypadku.

Scharakteryzowane pokrótce modele zmienności nie wyczerpują olbrzymiej ich różnorodności. Więcej na temat modeli zmienności można znaleźć w pracach M. Osińskiej[15], M. Doman, R. Domana[16], P. Fiszedera[17], L. Bauwensa, Ch.M. Hafnera i S. Laurenta[18].

---

[11] J. Davidson: *Time Series Modelling*, University of Exeter, Exeter 2011.

[12] D.B. Nelson: *Conditional Heteroscedasticity in Asset Returns: a New Approach*, „Econometrica" 1991, Vol. 59.

[13] Szerzej: M. Pipień: *op.cit.*, s. 56; M. Doman, R. Doman: *op.cit.*, s. 109–110.

[14] Zob.: J. Davidson: *op.cit.*, s. 25 i n.

[15] M. Osińska: *Ekonometria finansowa*, PWE, Warszawa 2006.

[16] M. Doman, R. Doman: *op.cit.*

[17] P. Fiszeder: *Modele klasy GARCH w empirycznych badaniach finansowych*, Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Mikołaja Kopernika, Toruń 2009.

[18] L. Bauwens, Ch.M. Hafner, S. Laurent: *Handbook of Volatility Models and Their Applications*, J. Wiley & Sons, Hoboken 2012.

Wyniki zastosowania wybranych modeli w analizie indeksów giełdowych

W przeprowadzonej analizie zostały wykorzystane dane z serwisu Stooq dotyczące trzech indeksów: WIG20 (Warszawski Indeks Giełdowy 20), SP500 (*Standard & Poor's* 500), FTSE250 (*Financial Times Stock Exchange* 250). W przypadku indeksu WIG20, ze względu na dostępność dziennych obserwacji (5 w tygodniu) od 3.10.1994 roku, analizie zostały poddane dane za okres 3.10.1994–31.10.2012 o łącznej liczbie obserwacji 4529. W odniesieniu do pozostałych indeksów przyjęto taki sam okres analizy.

W tabeli 1 przedstawiono podstawowe charakterystyki analizowanych indeksów. Odchylenie standardowe (dzienne) wyliczone dla stóp zwrotów poszczególnych indeksów wskazuje, że najwyższy poziom zmienności w badanym okresie cechował indeks FTSE250. Skośność i kurtoza wykazują natomiast odchylenia rozkładu empirycznego od rozkładu normalnego w postaci ujemnej asymetrii i tzw. grubych ogonów. Podane wyniki testu Jarque'a-Bera pozwalają na odrzucenie hipotezy o normalności rozkładu w przypadku wszystkich indeksów. Zastosowane testy oparte na statystyce Ljunga-Boxa pozwalają natomiast w każdym przypadku na odrzucenie hipotezy (przy poziomie istotności 0,05) o braku autokorelacji w stopach zwrotu oraz odrzucenie hipotezy o braku efektu ARCH w kwadratach stóp zwrotu. Podawane w tabelach wartości statystyki i poziomu p są wartościami dla maksymalnego opóźnienia m = 8 (ln 4529 = 8,4).

Tabela 1

Charakterystyka danych

Charakterystyki danych	WIG20	SP500	FTSE250
Odchylenie standardowe	1,85549	1,26102	5,43709
Skośność	–0,0936	–0,1715	–0,3902
Kurtoza	6,5283	10,689	8,4007
Test Jarque'a-Bera	2355,89 {0,000}	11238,1 {0,000}	5653,85 {0,000}
Statystyka Ljunga-Boxa (autokorelacja)	17,846 {0,022}	48,7936 {0,000}	78,2892 {0,000}
Statystyka Ljunga-Boxa (efekt ARCH)	1197,35 {0,000}	2727,11 {0,000}	2050,82 {0,000}

{ } – poziom istotności p.

Źródło: obliczenia własne na podstawie programu komputerowego Time Series Modelling v.4.31.

Występowanie związków liniowych w stopach zwrotów wskazuje na potrzebę zastosowania odpowiedniej specyfikacji równania średniej warunkowej. W przeprowadzonej analizie w każdym przypadku wykorzystano tutaj model ARMA dobrany na podstawie wstępnych oszacowań. Po przetestowaniu reszt z dopasowanego modelu liniowego na obecność heteroskedastyczności warunkowej typu autoregresyjnego, przeprowadzono próby dopasowania modeli zmienności GARCH, APARCH oraz EGARCH.

Kryteria wyboru modelu: logarytm wartości funkcji wiarygodności (logarytm wiarygodności) *LL*, kryterium Schwarza *BIC* (*Bayesian Information Criterion*), kryterium Hannana-Quinna *HQC* (*Hannan-Quinn Criterion*), kryterium informacyjne Akaike *AIC* (*Akaike Information Criterion*) zostały w tym wypadku określone w sposób zaproponowany przez J. Davidsona[19]. Większa wartość kryterium oznacza, że model jest lepiej dopasowany.

W przypadku zastosowania modelu ARMA w odniesieniu do szeregu stóp zwrotów indeksu WIG20, kryteria *LL*, *HQC* i *AIC* wskazały na model ARMA(2,1), jako najlepiej dopasowany, natomiast kryterium *BIC* na model ARMA(1,0). W tym miejscu warto zwrócić uwagę, że z myślą o wykorzystaniu modelu do prognozowania, wskazane jest stosowanie zasady oszczędności modelu i kierowanie się kryterium *BIC*[20]. Za wyborem modelu ARMA(1,0) przemawia także to, że pierwiastki wielomianu AR w modelu ARMA(2,1) mają moduły mniejsze od jeden, co wskazuje, że proces nie jest kowariancyjnie stacjonarny. W przypadku modelu ARMA(1,0) poza tym statystyka Ljunga-Boxa (autokorelacja) świadczy o wyeliminowaniu zależności liniowych. Statystyka Ljunga-Boxa (efekt ARCH) oznacza natomiast potrzebę dalszego modelowania heteroskedastyczności warunkowej.

W kolejnym zatem kroku przeprowadzono próbę dopasowania modelu AR(1)-GARCH. Najpierw dokonano estymacji parametrów i określono kryteria porównawcze dla modeli AR(1)–GARCH(1,0), AR(1)–GARCH(1,1), AR(1)–GARCH(2,1), AR(1)–GARCH(1,2), AR(1)–GARCH(2,2) z normalnym rozkładem błędu. Kryteria logarytmu wiarygodności i Akaike wskazały tutaj na model AR(1)-GARCH(2,2), a kryterium Schwarza i Hannana-Quinna na AR(1)–GARCH(2,1). W przypadku modelu AR(1)–GARCH(2,2) dwa parametry nie były jednak istotne statystycznie, a w modelu AR(1)–GARCH(2,1) parametr β_2 przyjął niezgodną z założeniami ujemną wartość. W związku z tym rozsądnym wydał się wybór modelu AR(1)–GARCH(1,1), dla którego kryteria nie były znacząco gorsze, natomiast parametry były istotne statystycznie. Pewnym mankamentem tego modelu był jednak brak wyeliminowania efektu ARCH, na co wskazała statystyka Ljunga-Boxa (efekt ARCH).

Następne próby dotyczyły zastosowania rozkładu błędu *t*-Studenta oraz skośnego rozkładu *t*-Studenta dla modelu AR(1)–GARCH(1,1). Wyniki podane w tabeli 2 wskazują wyraźnie na najlepsze dopasowanie modelu AR(1)–GARCH(1,1) z rozkładem *t*-Studenta. W przypadku modelu ze skośnym rozkładem *t*-Studenta, tylko logarytm wiarygodności przyjął trochę lepszy poziom, natomiast parametr skośności okazał się nieistotny statystycznie.

[19] J. Davidson: *op.cit.,* s. 37.
[20] M. Doman, R. Doman: *op.cit.*, s. 74.

Tabela 2

Wyniki estymacji i kryteria porównawcze modeli AR(1)–GARCH(1,1) z rozkładem normalnym, *t*-Studenta i skośnym *t*-Studenta dla szeregu stóp zwrotów indeksu WIG20

Parametry	AR(1)–GARCH(1,1)	AR(1)–GARCH(1,1)	AR(1)–GARCH(1,1)
Rozkład błędu	normalny	*t*-Studenta	*t*-Studenta skośny
Liczba stopni swobody d.f.^(1/2)		2.97536	2.97333
Logarytm skośności (ln(ksi))			0.01074 **{0.579}**
AR a_1	0.05311 {0.001}	0.04129 {0.006}	0.04189 {0.006}
GARCH $\sqrt{\alpha}$	0.66657	0.63735	0.63742
GARCH β_1	0.0805 {0,000}	0.07524 {0,000}	0.07555 {0,000}
GARCH γ_1	0.90847 {0,000}	0.91599 {0,000}	0.91563 (0,000)
Logarytm wiarygodności	–8687.93	–8640.5	**–8640.36**
Kryterium Schwarza	–8704.76	**–8661.55**	–8665.61
Kryterium Hannana-Quinna	–8696.45	**–8651.15**	–8653.14
Kryterium Akaike	–8691.93	**–8645.5**	–8646.36
Statystyka Ljunga-Boxa (autokorelacja)	5.444 {0.606}	7.3093 {0.397}	7.1919 {0.409}
Statystyka Ljunga-Boxa (efekt ARCH)	19.5627 {0.012}	24.6365 {0.002}	24.2693 {0.002}

{ } – poziom istotności *p*.

Źródło: obliczenia własne na podstawie programu komputerowego Time Series Modelling v.4.31.

W odniesieniu do zastosowanego modelu AR(1)-APARCH(1,1) z rozkładem normalnym, *t*-Studenta i skośnym *t*-Studenta wyniki zostały przedstawione w tabeli 3. Kryteria informacyjne wyraźnie określają model AR(1)-APARCH(1,1) z rozkładem *t*-Studenta jako najlepiej dopasowany, co więcej kryteria te są na trochę lepszym poziomie niż w przypadku modelu AR(1)-GARCH(1,1) z rozkładem *t*-Studenta. W tym przypadku statystyka Ljunga-Boxa także wskazuje na brak wyeliminowania efektu ARCH. Można uznać, że efekt ten został wyeliminowany przez model AR(1)-APARCH(1,1) z rozkładem normalnym i uwzględnionym parametrem asymetrii. Jednak kryteria informacyjne są w jego przypadku na gorszym poziomie.

Tabela 3

Wyniki estymacji i kryteria porównawcze modeli AR(1)–APARCH(1,1) z rozkładem normalnym, *t*-Studenta i skośnym *t*-Studenta dla szeregu stóp zwrotów indeksu WIG20

Parametry	AR(1)–APARCH(1,1)	AR(1)–APARCH(1,1)	AR(1)–APARCH(1,1)	AR(1)–APARCH(1,1)
Rozkład	normalny	normalny	*t*-Studenta	*t*-Studenta skośny
Liczba stopni swobody d.f.^(1/2)			3.01108	3.00908
Logarytm skośności (ln(ksi))				0.0197 {0.317}
AR a_1	0.05316 {0.001}	0.0546 {0,001}	0.04188 {0.006}	0.04264 {0,005}
APARCH $\sqrt{\alpha}$	0.65692	0.68088	0.63157	0.63107
APARCH μ (asymetria)		0.89325 {0.005}	0.76842 {0.003}	0.78656 {0.003}
APARCH η	1.89588	1.88192	1.61197	1.59999
APARCH β_1	0.08316 {0,000}	0.05502 {0,000}	0.05921 {0,000}	0.05944 {0,000}
APARCH γ_1	0.90852 {0,000}	0.91209 {0,000}	0.91702 {0,000}	0.91633 {0,000}
Logarytm wiarygodności	–8687.82	–8675.3	–8631.19	**–8630.72**
Kryterium Schwarza	–8708.87	–8700.55	**–8660.65**	–8664.39
Kryterium Hannana-Quinna	–8698.48	–8688.08	**–8646.1**	–8647.76
Kryterium Akaike	–8692.82	–8681.3	**–8638.19**	–8638.72
Statystyka Ljunga-Boxa (autokorelacja)	5.3947 {0.612}	**5.1056 {0.647}**	7.0651 {0.422}	6.9168 {0.438}
Statystyka Ljunga-Boxa (efekt ARCH)	20.7058 {0.008}	**15.1201 {0.057}**	20.6603 {0.008}	20.1217 {0.01}

{ } – poziom istotności p.

Źródło: obliczenia własne na podstawie programu komputerowego Time Series Modelling v.4.31.

Kolejną próbą dopasowania modelu zmienności było zastosowanie modelu EGARCH. Wyniki estymacji i kryteria porównawcze modeli AR(1)-EGARCH(1,1) z rozkładem normalnym, *t*-Studenta i skośnym *t*-Studenta zostały zawarte w tabeli 4. Spośród modeli AR(1)-EGARCH(1,1) model z rozkładem normalnym i uwzględnionym parametrem asymetrii okazał się najlepiej dopasowany. Kryteria dopasowania okazały się jednak być na znacznie gorszym poziomie niż w przypadku modeli AR(1)-GARCH(1,1) z rozkładem *t*-Studenta oraz AR(1)-APARCH(1,1) z rozkładem *t*-Studenta.

Tabela 4

Wyniki estymacji i kryteria porównawcze modeli AR(1)-EGARCH(1,1) z rozkładem normalnym, *t*-Studenta i skośnym *t*-Studenta dla szeregu stóp zwrotów indeksu WIG20

Parametry	AR(1)–EGARCH(1,1)	AR(1)–EGARCH(1,1)	AR(1)–EGARCH(1,1)	AR(1)–EGARCH(1,1)
Rozkład	normalny	normalny	*t*-Studenta	*t*-Studenta skośny
Liczba stopni swobody d.f.^(1/2)			2.17187	2.17179
Logarytm skośności (ln(ksi))				0.02473 {0,000}
AR a_1	0.05753 {0.001}	0.06019 {0,000}	0.35852 {0.997}	0.35882 {0.887}
EGARCH α	1.55141	1.45628	9.88931	9.88907
EGARCH v (asymetria)		–0.29048 {0,000}	–1.71021 {0.998}	–1.71513 {0.921}
EGARCH β_1	0.19831 {0,000}	0.18563 {0,000}	2.89738 {0.143}	2.89648 {0.256}
EGARCH γ_1	0.9416 {0,000}	0.94333 {0,000}	0.07629 {0.994}	0.0772 {0.942}
Logarytm wiarygodności	–8756.21	**–8738.79**	–25611.5	–25615.5
Kryterium Schwarza	–8773.05	**–8759.84**	–25636.7	–25645
Kryterium Hannana-Quinna	–8764.73	**–8749.45**	–25624.3	–25630.5
Kryterium Akaike	–8760.21	**–8743.79**	–25617.5	–25622.5
Statystyka Ljunga-Boxa (autokorelacja)	5.0415 {0.655}	4.9807 {0.662}	371.605 {0}	372.119 {0}
Statystyka Ljunga-Boxa (efekt ARCH)	52.1691 {0}	59.0385 {0}	1576.86 {0}	1576.89 {0}

{ } – poziom istotności p.

Źródło: obliczenia własne na podstawie programu komputerowego Time Series Modelling v.4.31.

Ogólnie zatem dwa spośród analizowanych modeli zasługują na szczególną uwagę: model AR(1)-GARCH(1,1) z rozkładem *t*-Studenta oraz AR(1)-APARCH(1,1) z rozkładem *t*-Studenta. Kryteria informacyjne w ich przypadkach są bardzo zbliżone (kryterium Schwarza dla pierwszego z nich wynosi: –8661,55, dla drugiego natomiast: –8660,65), natomiast w modelu AR(1)–APARCH(1,1) estymacji podlega o 2 parametry więcej. Fakt ten może skłaniać do wyboru prostszego modelu AR(1)–GARCH(1,1). Wybór taki byłby zgodny z wynikami badań spotykanymi w literaturze[21].

[21] Zob.: M. Doman, R. Doman: *op.cit.*, s. 98–103; J. Osiewalski, A. Pajor, M. Pipień: *Bayesowskie modelowanie i prognozowanie indeksu WIG z wykorzystaniem procesów GARCH i SV*, [w:] *XX Seminarium Ekonometryczne im. Prof. Zbigniewa Pawłowskiego*, red. A. Zeliaś, Akademia Ekonomiczna w Krakowie, Kraków 2004, s. 17–39.

Podkreślić należy, że uzyskane wyniki nie obejmowały bardziej pogłębionej analizy reszt oraz jakości prognoz. W każdym przypadku reszty charakteryzowały się natomiast ujemną asymetrią i podwyższoną kurtozą. Zastosowanie rozkładu *t*-Studenta czy skośnego rozkładu *t*-Studenta nie prowadziło zwykle do znaczących zmian tych wielkości.

Analogiczna analiza została przeprowadzona w odniesieniu do indeksu SP500. W tym wypadku jednak, mając na uwadze kryteria informacyjne oraz istotność parametrów, model ARMA(1,1)–APARCH(1,1) z asymetrią i rozkładem *t*-Studenta wydał się być najbardziej odpowiednim spośród rozważanych modeli.

Spośród rozpatrywanych modeli dla szeregu stóp zwrotów indeksu FTSE250 kryteria informacyjne wskazały wyraźnie na przewagę modelu AR(1)-APARCH(1,1) z asymetrią i rozkładem *t*-Studenta. Co więcej, kryteria te były w przypadku tego modelu na znacząco wyższym poziomie niż w przypadku modeli AR(1)-GARCH. Statystyka Ljunga-Boxa (efekt ARCH) wskazała na wyeliminowanie efektu ARCH.

Podsumowanie

Rozwój różnych modeli zmienności wynika z zaobserwowanych w szeregach czasowych własności empirycznych. To doprowadziło do szerokiego wachlarza alternatywnych modeli dostępnych dla praktyków. Jednak alternatywne modele powinny być uważane raczej za uzupełnienia względem siebie, a nie za konkurencyjne. Dopasowywanie więcej niż jednego modelu do określonego zbioru danych nie jest rzadkie, ponieważ pozwala to na porównanie różnych modeli pod względem dopasowania w próbie i radzenia sobie z prognozą. Modele najlepiej dopasowane nie oznaczają modeli o największej trafności prognostycznej. W niniejszym opracowaniu zwracano uwagę na dopasowanie modeli, nie podejmując problemu jakości prognoz. Podobnie jednak jak sam wybór modelu najlepiej dopasowanego, trudne jest także określenie modelu o największej trafności prognostycznej.

Niejednoznaczność wyników badań w tym zakresie tworzyła i tworzy nadal olbrzymie pole badawcze. W odniesieniu do rynku polskiego szczególnie interesujące wydają się porównania trafności prognostycznej modeli GARCH i SV z trafnością prognoz opartych na zmienności implikowanej. Dalsze badania autora zmierzać będą najprawdopodobniej w tym właśnie kierunku.

Literatura

Akgiray V.: *Conditional Heteroscedasticity in Time Series of Stock Returns: Evidence and Forecasts*, „Journal of Business" 1989, Vol. 62.

Bauwens L., Hafner Ch. M., Laurent S.: *Handbook of Volatility Models and Their Applications*, J. Wiley & Sons, Hoboken 2012.

Bollerslev T.: *Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity,* „Journal of Econometrics" 1986, Vol. 31.

Davidson J.: *Time Series Modelling*, University of Exeter, Exeter 2011.

Ding Z., Granger C.W.J., Engle R.F.: *A Long Memory Property of Stock Market Returns and a New Model,* „Journal of Empirical Finance” 1993, Vol. 1.

Doman M., Doman R.: *Modelowanie zmienności i ryzyka. Metody ekonometrii finansowej*, Wolters Kluwer, Kraków 2009.

Engle R.F.: *Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of Variance of UK Inflation*, „Econometrica” 1982, Vol. 50.

Engle R.F., Mustafa C.: *Implied ARCH Models from Option Prices*, „Journal of Econometrics” 1992, Vol. 52.

Fiszeder P.: *Modele klasy GARCH w empirycznych badaniach finansowych*, Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Mikołaja Kopernika, Toruń 2009.

Nelson D.B.: *Conditional Heteroscedasticity in Asset Returns: a New Approach*, „Econometrica” 1991, Vol. 59.

Osiewalski J., Pajor A., Pipień M.: *Bayesowskie modelowanie i prognozowanie indeksu WIG z wykorzystaniem procesów GARCH i SV*, [w:] *XX Seminarium Ekonometryczne im. Prof. Zbigniewa Pawłowskiego*, red. A. Zeliaś, Akademia Ekonomiczna w Krakowie, Kraków 2004.

Osińska M.: *Ekonometria finansowa*, PWE, Warszawa 2006.

Pipień M.: *Wnioskowanie bayesowskie w ekonometrii finansowej*, Akademia Ekonomiczna w Krakowie, Kraków 2006.

Schwert G.W., Seguin P.J.: *Heteroscedasticity in Stock Returns*, „Journal of Finance” 1990, Vol. 45.

Taylor S.J.: *Modelling Financial Time Series*, J. Wiley, Chichester 1986.

dr Ryszard Węgrzyn
Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie

Streszczenie

Celem artykułu była specyfikacja wybranych modeli zmienności, a także analiza wyników ich zastosowania w odniesieniu do wybranych indeksów giełdowych.

W opracowaniu przedstawiono wyniki zastosowania modeli ARMA, służących eliminacji zależności liniowych oraz modeli GARCH, APARCH oraz EGARCH, zarówno z normalnym warunkowym rozkładem błędu, jak i rozkładem t Studenta i skośnym rozkładem t Studenta. Analiza została przeprowadzona dla trzech indeksów giełdowych: WIG20, SP500 oraz FTSE250 i obejmowała okres 3.10.1994–31.10.2012 roku.

APPLICATION OF SELECTED VOLATILITY MODELS IN STOCK PRICE RISK ANALYSIS

Summary

The purpose of this article was the specification of selected volatility models and analysis of the results of their application for selected stock indices. The paper presents the results of the application of ARMA models (aimed at the elimination of linear relationships) and also GARCH, APARCH and EGARCH models with conditional normal distribution of the error, as well as Student's *t*-distribution and skewed Student's *t*-distribution. The analysis was carried out for three stock indices: WIG20, SP500 andFTSE250 and covered the period between 10.03.1994 and 31.10.2012.