

Zarządzanie ryzykiem długowieczności

Grażyna Trzpiot*

Streszczenie: Obserwowane zmiany wartości współczynników umieralności implikują nieoczekiwane wzrosty średniej długości życia. Równocześnie następuje wzrost odpowiednich oczekiwanych wartości, określonych korzyści z emerytury. W rezultacie należy podjąć opis i zmierzyć ryzyko długowieczności, a następnie poddać to ryzyko procesowi zarządzania jako ryzyko finansowe. Wprowadzenie nowych instrumentów celem zabezpieczenia ryzyka długowieczności oznacza, że kompletny pakiet narzędziowy dla zarządzania tymi planami powinien być zrównoważony długofalowo. Decyzje o tym, czy wprowadzić zabezpieczenia, czy eliminować ryzyko długowieczności, są złożone w holistycznej strukturze. W artykule podjęto problem znaczenia pomiaru i zarządzania ryzykiem długowieczności.

Słowa kluczowe: ryzyko długowieczności, zarządzanie ryzykiem

Wprowadzenie

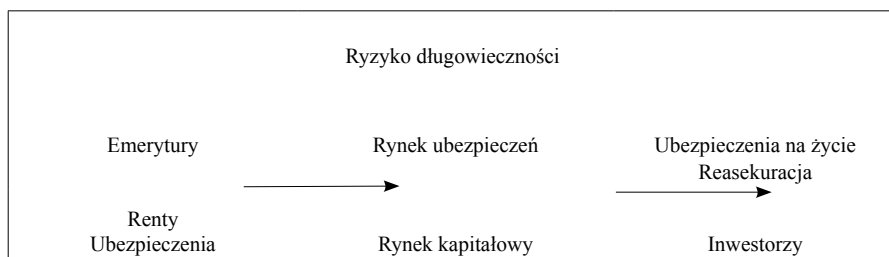
W artykule przedstawiono propozycje znane z literatury dotyczące modelowania ryzyka długowieczności. Opracowanie zaczyna się od wybranych spojrzeń na definicje ryzyka długowieczności, co pozwoli na lepsze zrozumienie nowego wyzwania związanego z pojęciami zarządzania ryzykiem zarówno z punktu widzenia finansowego, jak i ubezpieczeniowego. Obserwowane zmiany wartości współczynników umieralności (długowieczności) przynoszą nową jakość problemów i nowe wyzwania na różnych płaszczyznach naszego życia: społecznych, politycznych, gospodarczych i regulacyjnych, jeśli wspomnieć tylko niektóre.

Jednym z najbardziej nagłośnionych skutków długowieczności są emerytury. W 2009 roku w krajach najbardziej rozwiniętych wiele firm zlikwidowało plany emerytalne przygotowane dla pracowników (*defined benefis*, np. plany emerytalne w Stanach Zjednoczonych). Taki plan reprezentuje rzeczywiście ryzyko transferu zarówno ze strony przemysłu, jak i ubezpieczycieli do ubezpieczonych, a ze społecznego punktu widzenia nie jest już zadowalające. Analogicznie w kilku krajach plany emerytalne zastąpiono składkowymi, co prowadzi do tego samego rezultatu. Ponadto niektóre rządy podnoszą wiek emerytalny o dwa do pięciu lat, co prowadzi do wzrostu minimalnego wieku emerytalnego w populacji celem oddalenia procesu finansowania emerytury.

W branży ubezpieczeniowej również pojawiają się specyficzne wyzwania związane z ryzykiem długowieczności, tzn. pojawia się ryzyko, że funkcja trendu długowieczności istotnie statystycznie zmieni w się przyszłości. Coraz większy kapitał musi być docelowo utworzony,

* prof. dr hab. Grażyna Trzpiot, Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach, e-mail: trzpiot@ue.katowice.pl

skumulowany, aby sprostać temu długoterminowemu ryzyku oraz nowym regulacjom w Europie. W związku z tym stało się istotne dla firm ubezpieczeniowych, funduszy inwestycyjnych i emerytalnych wypracowanie efektywnej metodologii zabezpieczeń (rysunek 1). Metoda zabezpieczeń krzyżowych ma przenieść część ryzyka długowieczności na reasekuratorów lub na rynki finansowe. Ryzyko długowieczności nie jest jednak tak łatwe do przenoszenia, a tym samym do zarządzania. W szczególności ze względu na długoterminowy charakter dokładne prognozy są wrażliwe i modelowanie ryzyka stopy procentowej pozostaje wyzwaniem.



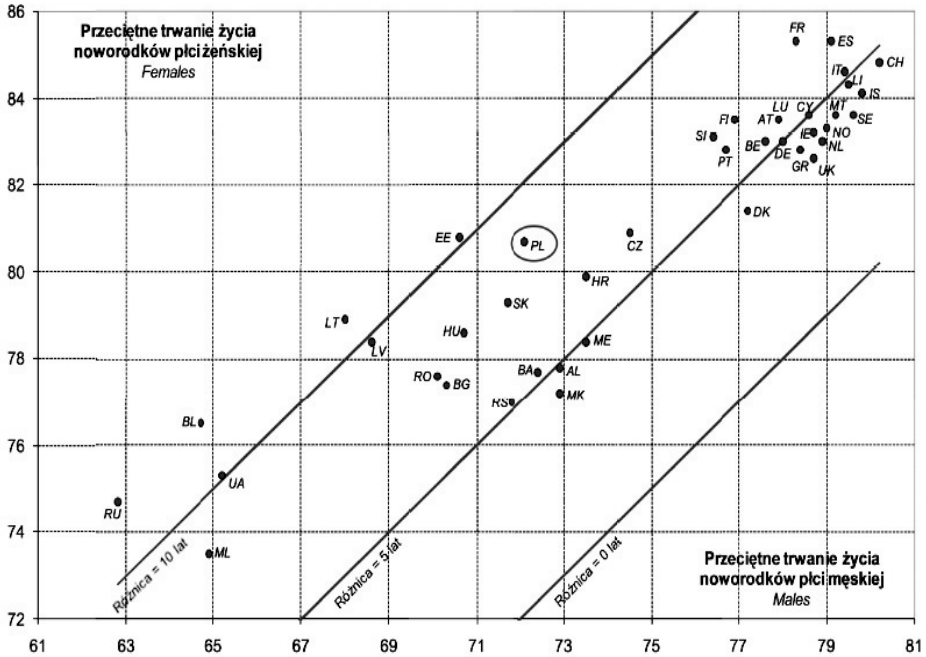
Rysunek 1. Zależności na rynkach finansowych

Źródło: opracowanie własne.

W celu zarządzania ryzykiem długowieczności wykorzystuje się tabele trwania życia zawierające prognozy trendu długowieczności. Tabele okazują się bardzo pomocne, w szczególności pozwalają na oszacowanie rezerw w ubezpieczeniach na życie, ale ich nieregularne aktualizacje mogą powodować problemy. Proces tempa zmian długowieczności jest ważniejszy niż oczekiwano oraz pozwala na aktualizację tempa zmian i poziomu rezerw. To sprawia, że firmom ubezpieczeniowym trudno polegać na oficjalnych wskaźnikach krajowych i zarządzają ryzykiem długowieczności na własne ryzyko.

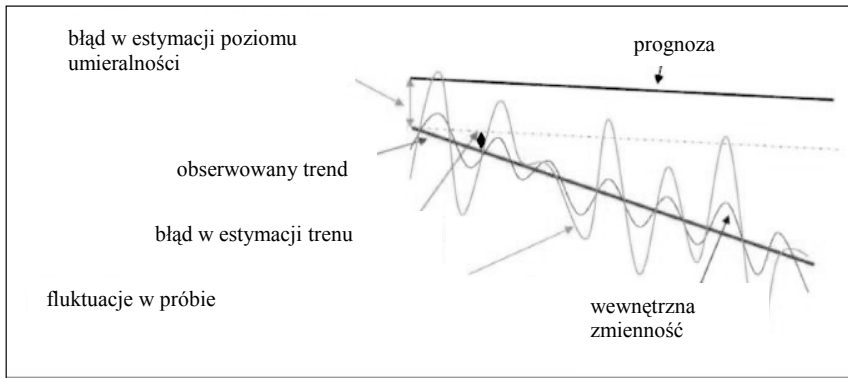
Aby lepiej zarządzać ryzykiem długowieczności, wykorzystuje się tabele trwania życia zawierające prognozy trendu długowieczności (rysunek 2).

Aby lepiej zrozumieć ryzyko długowieczności i uniknąć gwałtownych reakcji na krótkoterminowe oscylacje średniej wokół trendu, gdy rośnie dynamika długowieczności, należy badać przyczyny i różnorodność zmian (rysunek 3). Celem badania śmiertelności opracowano wiele standardowych modeli stochastycznych, niektóre z nich są inspirowane przez klasyczną literaturą ryzyka kredytowego i ryzyka stóp procentowych. W tych modelach śmiertelność jest wyjaśniona przez takie zmienne, jak wiek i czas. Alternatywne podejście składa się z podejść typu mikro do modelowania dla populacji, w których badane osoby charakteryzuje się nie tylko z uwagi na ich wiek, lecz także inne czynniki odzwierciedlające warunki życia (wiek biologiczny i chronologiczny nie muszą być spójne). Takie modele są niezwykle przydatne do analizy ryzyka danego portfela ubezpieczeń, a także na poziomie społecznym oraz politycznym w połączeniu z badaniami innych współczynników demograficznych, jak ocena poziomu współczynników urodzeń czy współczynników imigracji. Tworzy się projekcje scenariuszowe, a następnie można przygotować strategię.



Rysunek 2. Przeciętne dalsze trwanie życia w krajach Unii Europejskiej

Źródło: opracowanie własne na podstawie GUS.



Rysunek 3. Własności prognoz procesu wymieralności

Źródło: opracowanie własne na podstawie Barrieu, Albertini 2009.

1. Charakterystyka ryzyka długowieczności

Prognozy demograficzne określają najbardziej prawdopodobny przebieg zdarzeń, a projekcje demograficzne określają możliwy przebieg zdarzeń według założonych scenariuszy. Wszystkie te metody wykorzystują informacje przygotowywane najczęściej w postaci tablic trwania życia. Tablice trwania życia wykorzystuje się do analizy zmian umieralności względem różnych klas wiekowych i biorąc pod uwagę różne czynniki (np. śmiertelność niemowląt, starzenie się, wypadki), aktuariusze również używają tabel przeżycia (tabel wymieralności). Klasyczne tabele przeżycia zwykle mają dwa zapisy: wiek badanych osób zapisywany jako x oraz liczbę osób dożywających wieku x ukończonych lat oznaczaną l_x . Jest jednak ważne, aby zrozumieć, że badane populacje są w rzeczywistości fikcyjne.

Przykładowo można zmienić miejsce zamieszkania (kraj) lub zakupić inną polisę, w konsekwencji nastąpi brak obserwacji przed końcem okresu obserwacji oraz w wieku $x + 1$ lat. Aktuariusze będą rozważać tego typu ograniczone obserwacje przy użyciu niektórych klasycznego narzędzi statystycznych, takich jak estymator Kaplana–Meiera (Klein, Moeschberger 2003). Wewnętrzne dane firm ubezpieczeniowych zwykle umożliwiają estymację wartości funkcji przeżycia S zdefiniowanej jako:

$$S(x) = P(\tau > x) \quad (1)$$

dla $x \geq 0$ (ale niekoniecznie w \mathbb{N}), gdzie τ jest losowym czasem życia członków badanych wirtualnych populacji i P jest statystyczną miarą prawdopodobieństwa.

Analogicznie postępuje się, szacując liczbę ludności populacji badanych krajów. Począwszy od tabel życia, które podają szacunki dla $S(x)$, dla $x \in \mathbb{N}$ trzeba przyjąć arbitralnie kilka dodatkowych założeń do rekonstrukcji funkcji przeżycia. W praktyce zakłada się, że funkcja natężenia zgonów $\mu(x)$ (albo funkcja hazardu S) dla $x \geq 0$, jest zdefiniowana jako:

$$\mu(x) = -\frac{d(\ln S)}{dx}(x) \quad (2)$$

W niektórych przypadkach wykorzystuje się alternatywnie funkcję natężenia zgonów w miejsce rocznego współczynnika zgonów. Bierze się pod uwagę fakt, że w procesie wymierania wielkość populacji maleje, a więc następujące zgony mają wyższe wagi w procesie estymacji.

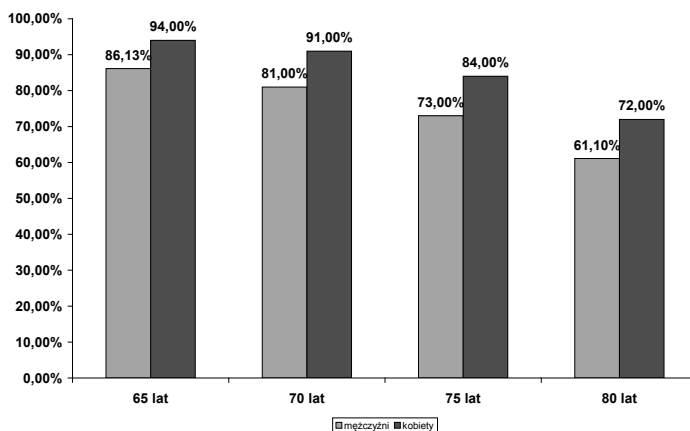
Poniżej zostanie wprowadzone pojęcie narażenia na ryzyko, które odnosi się do średniej liczby osób w populacji w ciągu roku kalendarzowego, dostosowane do wybranego przedziału czasu badania w populacji. Ekspozycja na ryzyko jest definiowana jako średnia śmiertelność:

$$ETR_x = \int_0^1 l_{x+u} du \quad (3)$$

jest następnie definiowana jako:

$$m_x = \frac{l_x - l_{x+1}}{ETR_x} \quad (4)$$

Wskazując na zmiany poziomu śmiertelności w Polsce, można stwierdzić, że korzyści wynikające z rozwoju nowych technologii medycznych i nowoczesnych metod diagnostycznych oraz poprawa kondycji zdrowotnej Polaków realizowana przez prozdrowotny styl życia mają odzwierciedlenie w trwającym już od dwudziestu lat spadku natężenia zgonów, a tym samym wydłużaniu przeciętnego trwania życia (rysunek 4). W 2011 roku w Polsce mężczyźni żyli przeciętnie 72,4 lat, natomiast kobiety 80,9. W stosunku do 1990 roku mężczyźni żyją dłużej o 6,2 lat, a kobiety o 5,7.



Rysunek 4. Prawdopodobieństwo dalszego trwania życia – wyznaczone na podstawie tablic trwania życia z 2011 roku (GUS).

Źródło: opracowanie własne.

2. Modelowanie ryzyka długowieczności

Gdy rozważa się ryzyko długowieczności, niezbędne jest określenie nie tylko poziomu współczynników zgonu (śmiertelności), lecz także ich ewolucji w czasie. Poniżej zostaną przedstawione modele służące do predykcji procesu wymieralności.

2.1. Model Lee–Cartera

Model opisuje cząstkowe współczynniki zgonów $m_i(x)$ lub funkcję $\mu_x(t)$ natężenia zgonów. W modelu Lee–Cartera są rozważane cząstkowe współczynniki zgonów. Autorzy rozważali grupowe współczynniki zgonów w podziale na pięcioletnie grupy wiekowe¹. Można to

¹ Badanie zgonów w USA było prowadzone dla lat 1900–1989, natomiast prognozy umieralności zostały wyznaczone do 2065 r.

zapisać jako $T_x(t)$ zmienną losową ciągłą (o wartościach nieujemnych), która opisuje czas życia osoby w wieku x lat w momencie czasu (kalendarzowym) t . Gęstość tej zmiennej losowej można oznaczyć jako $\mu_x(t)$. Wyrażenie $\mu_x(t)dx$ jest równe prawdopodobieństwu zgonu w przedziale czasu $[x, x + dx]$ osób, które były w wieku x lat w momencie czasu (kalendarzowym) t . Funkcję $\mu_x(t)$ nazywa się funkcją natężenia zgonów.

Model zapisuje się jako:

$$\ln \mu_x(t) = \alpha_x + \beta_x \kappa_t + \varepsilon_{x,t}, \quad \varepsilon_{x,t} \sim N(0, \sigma). \quad (5)$$

gdzie $\alpha_x, \beta_x, \kappa_t$ są parametrami modelu, $\varepsilon_{x,t}$ jest składnikiem losowym. Parametr α_x reprezentuje średni poziom zgonów w osób w wieku x względem czasu; zależny od czasu parametr κ_t opisuje zmiany tempa zgonów względem czasu, β_x jest parametrem związanym z wrażliwością osób w wieku x na κ_t (w różnych grupach wiekowych); β_x opisuje również (na skali logarytmicznej) dewiację śmiertelności z zachowaniem średniej wartości κ_t .

Dodatkowo dla uzyskania jednoznaczności rozwiązań przyjmuje się:

$$\sum \beta_x = 1 \text{ oraz } \sum \tau_x = 0. \quad (6)$$

Dla kalibracji parametrów można wykorzystać metodę największej wiarygodności, przyjmując dodatkowo rozkład Poissona jako rozkład liczby zgonów osób w tym samym wieku x w danym roku t .

2.2. Model P -splajnow

W modelu² wykorzystujemy splajny³ z funkcją kary (P -splajnow) w celu uzyskania prognoz cząstkowych współczynniki zgonów $m_t(x)$. To podejście jest używane przez Curriego i in. (2004) dla wygładzenia funkcji natężenia zgonów i wyeliminowania „szoków” zgodnie z sugestią Kirkby’ego i Curriego (2007), która może być wykorzystana do uzyskania scenariuszy i badania za pomocą *stress* testów (warunków skrajnych). Ogólnie rzecz biorąc, model P -splajnow ma postać:

$$\log m_t(x) = \sum_{i,j} \theta^{i,j} B_t^{i,j}(x) \quad (7)$$

gdzie $B^{i,j}$ są bazą funkcji sześciennych używanych do dopasowania do danych, do krzywej historycznych danych, $\theta^{i,j}$ to szacowane parametry. Podejście z wykorzystaniem P -splajnow jest odmienne od klasycznego podejścia dla splajnow kubicznych poprzez wprowadzenie funkcji kary na parametry $\theta^{i,j}$, aby wyznaczyć funkcję prawdopodobieństwo. Aby prognozować śmiertelność, parametry $\theta^{i,j}$ są ekstrapolowane z wykorzystaniem danej kary wagi.

² Ten model był wykorzystywany w Wielkiej Brytanii.

³ Funkcje sklepane.

2.3. Model CDB

Cairns, Dowd i Blake (CDB) wprowadzili ogólną postać modeli, które można stosować w zależności od celu modelowania i rozkładu struktury umieralności. Ogólny model wyraża się przez⁴:

$$\text{logit } q_t(x) = \kappa_t^1 \beta_x^1 \gamma_{t-x}^1 + \dots + \kappa_t^n \beta_x^n \gamma_{t-x}^n \quad (8)$$

W modelu są trzy rodzaje parametrów: odnoszące się do wieku β^i w roku kalendarzowym κ^i oraz parametr związany z badaną kohortą γ^i . Model Lee–Cartera jest szczególnym przypadkiem tego modelu. Szczególnym przykładem modelu pochodzącym od ogólnej postaci jest:

$$\text{logit } \mu_t(x) = \kappa_t^1 + \kappa_t^2(x - \bar{x}) + \kappa_t^3(x - \bar{x})^2 - \sigma_x^2 + \gamma_{t-x}^n \quad (9)$$

gdzie \bar{x} jest średnią wieku osób, σ^2 jest wariancją wieku osób obliczone dla danych historycznych rozkładu zgonów w określonym przedziale czasu rzeczywistego. Parametry κ_t^1 , κ_t^2 , κ_t^3 opisują zmiany natężenia zgonów względem czasu, specyficzne zmiany w badanych grupach wiekowych i parametr związany z badaną kohortą γ^i .

Zależność pomiędzy procesem wymierania a długowiecznością jest zauważalna, gdy rozważa się prawdopodobieństwa przeżycia. Szansa na przeżycie jest iloczynem skorelowanych współczynników zgonów zapisanych jako prawdopodobieństwo przeżycia aż do dnia $t + u$ osoby w wieku x w czasie t :

$$S_t(x, T) = \prod_{i=0}^{T-1} [1 - q(x + i, t + i)] \quad (10)$$

W rezultacie modele opisane powyżej można wykorzystać do opisu zarówno procesu wymierania, jak i ryzyka długowieczności. Jednak ekstremalne wartości skrajne w obu przypadkach są odmienne. W analizie ryzyka zgonu wartości ekstremalne skrajne odpowiadałyby pandemii, atakom terrorystycznym itp. Rozważając ryzyko długowieczności, należy uznać, że ekstremalne scenariusze odpowiadają istotnym zmianom trendu, tendencji wzrostowej długowieczności. Rzeczywiście z jednej strony ryzyko zgonu to ryzyko krótkoterminowe (od roku do pięciu lat spłaty), które z aktuarialnego punktu widzenia wygląda bardzo podobnie jak ryzyko katastrof. Z drugiej strony ryzyko długowieczności to długofalowe ryzyko z terminem spłaty od dwudziestu do osiemdziesięciu lat i jest nieodporne na zmiany trendu (Ojrzyńska 2013), szczególnie że ryzyko długowieczności rośnie szybciej, niż to było przewidywane. W związku z tym zmiany parametrów funkcji trendu (np. w modelu Lee–Cartera) są ważniejsze dla modelowania długowieczności niż modelowania śmiertelności. Warto zauważyć wpływ rynków finansowych na zarządzanie zarówno ryzykiem śmiertelności, jak i długowieczności: korekty i ponowne wyceny trzeba przeprowadzać częściej niż w przypadku klasycznego portfela ubezpieczeń. Trudności są w rozróżnieniu zmiany trendu długowieczności od zakłóceń, oscylacji wokół średniej.

⁴ $\text{logit}(x) = \ln(x/(1-x))$

3. Ryzyko długowieczności – skala makro i mikro

Podstawowa cecha finansowa związana z ryzyko długowieczności to horyzont inwestycji przyjmowany na ponad pięćdziesiąt lat. Z finansowego oraz ekonomicznego punktu widzenia wiek populacji ma wpływ na wypłaty emerytur oraz długoterminowe ubezpieczenia. To jest pole do badań wielu wielowymiarowych zależności.

3.1. Transfer ryzyka długowieczności

Od lat sześćdziesiątych ubiegłego wieku obserwuje się stały wzrost średniej długości życia w Europie i Ameryce Północnej. Stanowi to poważne zagrożenie dla systemu emerytalnego oraz ubezpieczycieli. Różne techniki ograniczenia ryzyka kredytowego zostały niedawno wprowadzone celem lepszego zarządzania tym ryzykiem. Sekurytyzacja ryzyka długowieczności jest przedmiotem wielu dyskusji i jest postrzegana jako potencjał na przyszłość. Funkcjonują obecnie instrumenty finansowe wymagające opisu zarządzania ryzykiem długowieczności. Poniżej zostaną wskazane wybrane z nich.

3.2. Indeksy długowieczności

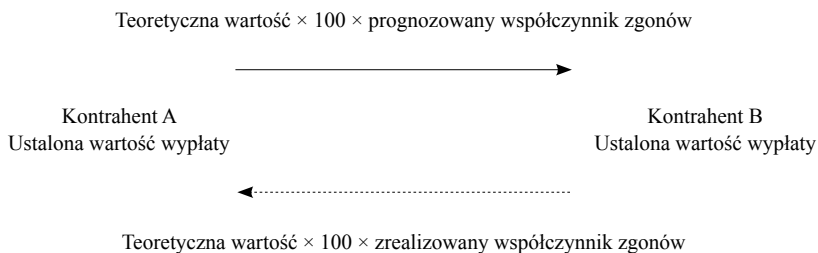
Na podstawie różnych inicjatyw zmierzających do poprawy oceny, przejrzystości i zrozumienia ryzyka długowieczności zostały utworzone różne wskaźniki. Dobry indeks długowieczności powinien opierać się na danych krajowych (dostępnych i wiarygodnych), transparentnych, ale powinien być wystarczająco elastyczny, aby zmniejszać bazowe ryzyko i odnosić się tylko do ryzyka długowieczności. Krajowe instytuty statystyczne budują roczne wskaźniki oparte na danych krajowych, uwzględniające projekcje śmiertelności lub oczekiwanej długości życia (dla płci, wieku, społeczno-gospodarcze, energetyczne).

Wśród istniejących indeksów długowieczności można wymienić:

- Credit Suisse Longevity Index, ogłoszony w grudniu 2005 roku, wykorzystuje krajowe statystyki dla ludności USA, dla niektórych grup wieku i płci, subwskaźniki;
- indeks JP Morgan LifeMetrics, ogłoszony w marcu 2007 roku, odnosi się do danych dotyczących populacji USA, Anglii, Walii oraz Holandii;
- Goldman Sachs Mortality Index, ogłoszony w grudniu 2007 roku, wykorzystuje krajowe statystyki dla ludności USA powyżej 65 lat;
- Xpect Data, notowany na Deutsche Borse od marca 2008 roku, podaje dane miesięczne oczekiwanego dalszego życia dla Niemiec i Holandii.

3.3. Q-forwards

JP Morgan był szczególnie aktywny, próbując ustalić punkt odniesienia dla rynku długowieczności. Firma ma opracowane na platformie ryzyko długowieczności w LifeMetrics, ale również opracowała niektóre standardowe instrumenty finansowe dla zabezpieczania ryzyka długowieczności o nazwie „q-forwards”. Kontrakty (rysunek 5) są zawierane na podstawie indeksu, którym może być wskaźnik śmiertelności lub przeżycia, jak kwotowane podane w LifeMetrics.



Rysunek 5. Rozliczenie kontraktów q-forwards

Źródło: opracowanie własne.

3.4. Transakcje swapowe długoterminowe

Naturalnym instrumentem zabezpieczającym są swapy dla renty, dla funduszy emerytalnych i ubezpieczycieli. W przypadku wskaźnika przeżycia data rozpoczęcia kontraktu jest również bardzo ważna – może zapobiec fluktuacjom oraz konieczności sporządzania różnych umów odnoszących się do tej samej kohorty i w przyszłości. Wiadomo, że takie transakcje pioniersko prowadzi od 2008 roku JP Morgan.

4. Modelowanie stochastyczne śmiertelności w transakcjach finansowych

4.1. Stochastyczne modelowanie umieralności

Aby wyceniać długoterminowo ceny powiązanych papierów wartościowych, trzeba opracować modele prognostyczne procesu śmiertelności, które będą dokładniejsze niż aktualnie stosowane przez firmy ubezpieczeniowe. Jak zapisano wcześniej, w deterministycznym podejściu funkcja natężenia zgonów (współczynnik ryzyka) $m(x, t)$ wyznacza prawdopodobieństwo przeżycia wieku x w czasie t , które jest definiowane jako:

$$S_t(x, T) = \exp\left(-\int_t^T \mu(x+s-t, s) ds\right) \quad (11)$$

To podejście może być rozszerzone do postaci stochastycznej. Stochastyczną funkcję natężenia zgonów (wskaźnik zagrożenia) $\mu(x, t)$ można otrzymać za pomocą dwóch różnych podejść. Z jednej strony, przez analogię z tabel okresowych trwania życia, przyjęcie periodycznego modelu pozwala zapisać proces $s \rightarrow \mu(x, s)$ dla każdego wieku x badanych osób. W tym przypadku $\mu(x, s)$ jest określone jako stopa spot współczynników zgonów (Milevsky, Promislow 2001).

Z drugiej strony, przez analogię z tabelami trwania życia, podejście drugie jest oparte na kohortach i można modelować proces $s \rightarrow \mu(x+s, s)$, biorąc pod uwagę ewolucję przyszłej śmiertelności badanej kohorty.

Można zapisać $(\Omega; \mathcal{F}_t; \mathbb{P})$ przestrzeń probabilistyczną. Intensywność procesu $\mu(x, t)$ jest dostosowana do informacji \mathcal{F}_t dostępnej w każdym czasie t . Prawdopodobieństwo przeżycia jest definiowane jako:

$$S_t(x, T) = E_t \left(\exp\left(-\int_t^T \mu(x+s-t, s) ds\right) \right) \quad (12)$$

Warto zauważyć, że $\mu(x, t)$ jest równoważne $\mu(x_t, T)$, gdzie x_t jest wiekiem badanej osoby w czasie T . Jeżeli rozważyć podejście drugie, bazując na kohorcie, można zdefiniować $\mu_t(x, T)$, gdzie x jest wiekiem badanej osoby w czasie t jako:

$$\mu_t(x, T) = -\frac{\partial}{\partial T} \ln E_t \left(\exp\left(-\int_t^T \mu(x+s-t, s) ds\right) \right) \quad (13)$$

Przez analogię ze stopą oprocentowania lub modelowaniem ryzyka kredytowego $\mu_t(x, T)$, stopą forward współczynników zgonu. Warto zauważyć, że $S_t(x, T)$ jest równoważne cenie w czasie t zero-kuponowej obligacji o czasie wykonania w T . Te definicje są przydatne podczas wyceny umów ubezpieczenia, bo bierze się pod uwagę całą wiekową strukturę umieralności, co jest zgodne z praktyką ubezpieczycieli.

4.2. Długoterminowe stopy procentowe

Zawarte kontrakty finansowe związane z ryzykiem śmiertelności zazwyczaj mają okres zapadalności do dwudziestu lat, podczas gdy zabezpieczenia długowieczności powiązane są zazwyczaj z zapisami o znacznie dłuższym terminie zapadalności (ponad czterdzieści lat). W większości z tych umów osadzone jest ryzyko stopy procentowej. W krótszym horyzoncie czasowym (do dwudziestu lat) standardowe podejścia mogą być stosowane w celu zabezpieczenia tego ryzyka stopy procentowej, jako że rynek o zapadalności w takich terminach jest dość płynny. Jednak nie jest już w przypadku dłuższych terminów zapadalności, gdy rynek stopy procentowej staje się bardzo płynny, a standardowe podejście niełatwo rozszerzyć. Modele wyceny odnoszą się do modeli równowagi. Przykładowo Gollier (2007, 2008) studiuje przypadek, w którym rozważa konsumpcję zapisaną jako geometryczny ruch Browna. Hansen i Scheinkman (2009) wykorzystują procesy Levy'ego do modelowania konsumpcji, a następnie wyceny krzywej IRY poprzez procesy Markowa. W literaturze z zakresu ekonomii modelowanie procesów w sposób dynamiczny nie jest częstym podejściem. Dodatkowo można rozważyć stochastyczną funkcję użyteczności (Lazrak, Zapatero 2004), a następnie zapisać relacje dominacji stochastycznych dla tak rozbudowanego modelu (Trzpiot 2006).

Uwagi końcowe

W artykule przedstawiono wybrane aspekty modelowania procesu umieralności w powiązaniu z rynkiem finansowym i klasycznym podejściem do zarządzania ryzykiem na rynku finansowym.

Ryzyko długowieczności ma inne znaczenie dla rynków finansowych – to odpowiedzialność za długą ekspozycję na ryzyko związane z zamykaniem pozycji finansowych, wypłacalnością. Inne znaczenie ma dla emerytów – to ryzyko nieotrzymania należnych wypłat lub wypłat na innym, niższym poziomie w związku ze zwiększającą się długością życia. Należy zatem spojrzeć na ryzyko długowieczności jako na ryzyko systematyczne i modelować jako zmienną losową o długim ogonie. Ryzyko systematyczne rośnie wraz z upływem czasu, więc jego udział w ryzyku całkowitym również wzrasta.

Literatura

- Barrieu P., Albertini L. (2009), *The handbook of insurance-linked securities*, Wiley Finance.
- Cairns A.J.G., Dowd K., Blake D. (2008), *Modeling and management of mortality risk: a review*, „Scandinavian Actuarial Journal”, vol. 108(2), s. 79–113.
- Currie I.D., Durban M., Eilers P.H.C. (2004), *Smoothing and forecasting mortality rates*, „Statistical Modeling”, vol. 4(4), s. 279–305.
- Gollier C. (2007). *The consumption-based determinants of the term structure of discount rates*, „Mathematics and Financial Economics”, vol. 1(2), s. 81–101.

- Gollier C. (2008). *Discounting with fat-tailed economic growth*, „Journal of Risk and Uncertainty”, s. 1–16.
- Hansen L.P., Scheinkman J.A. (2009), *Long-term risk: An operator approach*. „Econometrica”, vol. 77(1), s. 177–234.
- Kirkby J., Currie I. (2007). *Smooth models of mortality with period shocks*, „Age”, vol. 20(40).
- Klein J.P., Moeschberger M.L. (2003), *Survival analysis: techniques for censored and truncated data*, Springer.
- Lazrak A., Zapatero F. (2004), *Efficient consumption set under recursive utility and unknown beliefs*, „Journal of Mathematical Economics”, vol. 40(1–2), s. 207–226.
- Lee R.D., Carter L. (1992), *Modeling and forecasting the time series of us mortality*, „Journal of the American Statistical Association”, vol. 87, s. 659–671.
- Milevsky M.A., Promislow S.D. (2001), *Mortality derivatives and the option to annuities*, „Insurance Math. Econom.”, vol. 29(3), s. 299–318.
- Ojrzyńska A. (2013), *Zastosowanie odpornej metody dekompozycji według wartości osobliwych w szacowaniu modelu umieralności*, w: *Zastosowanie metod ilościowych i jakościowych w modelowaniu i prognozowaniu zjawisk społeczno-gospodarczych*, red. B. Pawelek, Wydawnictwo Uniwersytetu Jagiellońskiego, Kraków.
- Rossa A. (red.) (2011), *Analiza i modelowanie umieralności w ujęciu dynamicznym*, Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego, Łódź.
- Trzpiot G. (2006), *Dominacje w modelowaniu i analizie ryzyka na rynku finansowym*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Katowicach, Katowice 2006.
- Trzpiot G. (2013a), *Zmiany struktury demograficznej państw UE – wyzwanie dla logistyki społecznej*, Studia Ekonomiczne Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach, Zeszyty Naukowe Wydziałowe nr 175, Katowice, s. 50–69.
- Trzpiot G. (2013b), *Prognozy ludności dla Polski – perspektywa logistyki społecznej*, Studia Ekonomiczne Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach, Zeszyty Naukowe Wydziałowe nr 175, Katowice, s. 70–91.
- Trzpiot G., Ojrzyńska A. (2014), *Analiza ryzyka starzenia demograficznego wybranych miast w Polsce*, Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach, Katowice, 2014.

LONGEVITY RISK MANAGEMENT

Abstract: Historically, unexpected improvements in mortality rates have led to large, unanticipated increases in life expectancy, with accompanying increases in the value of defined benefit pension liabilities. As a result, longevity risk needs to be measured and managed alongside the financial risks facing these plans. The emergence of new instruments for hedging longevity risk means that a complete toolkit for managing these plans in a way that is sustainable over the long term. Decisions to hedge or eliminate longevity risk need to be made in a holistic framework. We point out the importance of measuring and managing longevity risk.

Keywords: longevity risk, defined benefit pension plans, risk management