

Beata Bieszk-Stolorz
Uniwersytet Szczeciński

ZWIĄZKI MIĘDZY WSPÓŁCZYNNIKAMI WRAŻLIWOŚCI W MODELU WYCENY OPCJI GARMANA-KOHLHAGENA

Streszczenie

W teorii opcji często zachodzi konieczność zbadania wrażliwości ceny opcji na zmiany niektórych parametrów: ceny instrumentu bazowego, czasu do terminu wygaśnięcia, zmienności oraz stopy procentowej. Matematycznie odpowiada to analizie pochodnych cząstkowych ceny opcji względem tych parametrów. Współczynniki te, nazywane wskaźnikami (literami) greckimi, określają, jak zmienia się wartość pojedynczego czynnika ryzyka przy założeniu, że wszystkie inne są stałe. Najważniejszymi współczynnikami greckimi są: *delta*, *gamma*, *theta*, *vega* i *rho*. Celem artykułu jest zaprezentowanie wybranych związków między współczynnikami wrażliwości obliczonymi dla wartości walutowej opcji kupna wyznaczonej na podstawie modelu wyceny Garmana-Kohlhagena.

Słowa kluczowe: opcje, model wyceny Garmana-Kohlhagena, współczynniki wrażliwości.

Wprowadzenie

W teorii opcji często zachodzi konieczność zbadania wrażliwości ceny opcji na zmiany niektórych parametrów: ceny instrumentu bazowego, czasu do terminu wygaśnięcia, zmienności oraz stopy procentowej. Matematycznie odpowiada to analizie pochodnych cząstkowych ceny opcji względem tych parametrów. Współczynniki te, nazywane wskaźnikami (współczynnikami) grecki-

mi, określają, jak zmienia się wartość pojedynczego czynnika ryzyka przy założeniu, że wszystkie inne są stałe. Najważniejszymi współczynnikami greckimi są: *delta*, *gamma*, *theta*, *vega* i *rho*¹.

1. Model Garmana-Kohlhagena

Do wyceny europejskiej opcji walutowej stosuje się model Garmana-Kohlhagena, opisany następującymi wzorami²:

$$\begin{aligned}
 c &= Se^{-r_f(T-t)}N(d_1) - Xe^{-r_d(T-t)}N(d_2), \\
 p &= Xe^{-r_d(T-t)}N(-d_2) - Se^{-r_f(T-t)}N(-d_1), \\
 d_1 &= \frac{\ln\left(\frac{S}{X}\right) + \left(r_d - r_f + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \\
 d_2 &= \frac{\ln\left(\frac{S}{X}\right) + \left(r_d - r_f - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}
 \end{aligned} \tag{1}$$

gdzie:

- S – kurs waluty,
- r_d – stopa wolna od ryzyka w danym kraju,
- r_f – stopa wolna od ryzyka w kraju obcej waluty,
- σ – odchylenie standardowe stopy zwrotu liczonej dla kursu waluty,
- c – wartość europejskiej opcji kupna,
- p – wartość europejskiej opcji sprzedaży,
- X – cena wykonania opcji,
- T – termin wygaśnięcia,
- t – termin bieżący.

¹ Więcej na temat podstawowych współczynników wrażliwości w pozycji K. Jajuga, T. Jajuga, *Inwestycje*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1998, s. 190–192.

² J. Hull, *Kontrakty terminowe i opcje. Wprowadzenie*, WIG-PRESS, Warszawa 1999, s. 199.

$N(x)$ we wzorach (1) jest to wartość dystrybuanty standaryzowanego rozkładu normalnego dla argumentu x . Liczbę $\tau = T - t$ nazywa się czasem do wygaśnięcia.

2. Współczynniki wrażliwości w modelu Garmana-Kohlhagena

Współczynniki wrażliwości są pochodnymi cząstkowymi ceny opcji względem zmiennych, od których ona zależy (tabela 1). Oprócz pięciu podstawowych: *delta*, *gamma*, *theta*, *vega* i *rho* w teorii opcji wykorzystuje się również kilka innych. Są to: *speed*, *charm*, *color*, *volga*, *vanna*, *dual delta*, *dual gamma*, *zomma*³.

Tabela 1. Wybrane współczynniki wrażliwości

Greeks	Call	Put
delta	$\frac{\partial c}{\partial S}$	$\frac{\partial p}{\partial S}$
gamma	$\frac{\partial^2 c}{\partial S^2}$	$\frac{\partial^2 p}{\partial S^2}$
vega	$\frac{\partial c}{\partial \sigma}$	$\frac{\partial p}{\partial \sigma}$
theta	$\frac{\partial c}{\partial t} = -\frac{\partial c}{\partial \tau}$	$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial \tau}$

³ Szerzej na temat współczynników wrażliwości w pracach B. Stolorz, *Analiza współczynnika rho w modelu wyceny opcji Garmana-Kohlhagena*, w: *Rynek Kapitałowy. Skuteczne Inwestowanie*, t. II, W. Tarczyński (red.), Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego, Szczecin 2007, s. 423–432; B. Stolorz, *Dual delta i dual gamma – współczynniki wrażliwości*, w: *Metody ilościowe w ekonomii*, red. J. Hozer, „Studia i Prace Wydziału Nauk Ekonomicznych i Zarządzania” nr 15, Szczecin 2009, s. 189–198; B. Stolorz, *Szybkość, kolor i urok opcji*, w: *Metody ilościowe w ekonomii*, J. Hozer (red.), „Studia i Prace Wydziału Nauk Ekonomicznych i Zarządzania” nr 11, Szczecin 2008; B. Stolorz, *Volga i vanna – współczynniki wrażliwości*, w: *Inwestowanie na rynku kapitałowym*, W. Tarczyński (red.), „Studia i Prace Wydziału Nauk Ekonomicznych i Zarządzania” nr 10, Szczecin 2008, s. 172–179; B. Stolorz, *Zomma – współczynnik wrażliwości opcji*, w: *Rola informatyki w naukach ekonomicznych i społecznych. Innowacje i implikacje interdyscyplinarne*, Z. Zieliński (red.), t. 2, Wydawnictwo Wyższej Szkoły Handlowej, Kielce 2009, s. 310–315.

Greeks	Call	Put
rho	$\frac{\partial c}{\partial r}$	$\frac{\partial p}{\partial r}$
dual delta	$\frac{\partial c}{\partial X}$	$\frac{\partial p}{\partial X}$

Źródło: opracowanie własne.

Początkowo modele wyceny opcji odnosiły się tylko do rynku akcji, gdzie do obliczenia wartości opcji stosowano wyłącznie krajowe stopy procentowe. Od momentu pojawienia się opcji walutowych zaczęto określać *rho* używając również do pochodnych wartości opcji względem zagranicznych stóp procentowych⁴. Stąd też w modelu wyceny opcji walutowych Garmana-Kohlhagena pojawiają się współczynniki ρ_f i ρ_d , które odnoszą się odpowiednio do zagranicznej i krajowej stopy procentowej.

Tabela 2. Wybrane współczynniki wrażliwości w modelu Garmana-Kohlhagena dla opcji kupna

Greeks	Model wyceny opcji Garmana-Kohlhagena (call)
<i>delta</i>	$e^{-r_f \tau} N(d_1)$
<i>gamma</i>	$e^{-r_f \tau} \frac{N'(d_1)}{S\sigma\sqrt{\tau}}$
<i>vega</i>	$Se^{-r_f \tau} N'(d_1)\sqrt{\tau}$
<i>theta</i>	$-e^{-r_f \tau} \frac{SN'(d_1)\sigma}{2\sqrt{\tau}} - r_d X e^{-r_d \tau} N(d_2) + r_f S e^{-r_f \tau} N(d_1)$
ρ_d	$X\tau e^{-r_d \tau} N(d_2)$
ρ_f	$-S\tau e^{-r_f \tau} N(d_1)$
<i>dual delta</i>	$-e^{-r_d \tau} N(d_2)$

Źródło: opracowanie własne.

⁴ R.M. Korona, *Niedoceniana reszta*, „Bank” 1999, nr 7, s. 67.

3. Wybrane związki między współczynnikami wrażliwości w modelu Garmana-Kohlhagena

Między współczynnikami wrażliwości zachodzą pewne zależności, które ułatwiają w znacznym stopniu skomplikowane obliczenia ich wartości⁵. Związki te mogą również służyć do weryfikacji poprawności wykonanych obliczeń.

Między współczynnikami *delta* i *dual delta* istnieje zależność nazwana jednorodnością przestrzeni. Określona jest ona następującym wzorem:

$$c = S \cdot \text{delta} + X \cdot \text{dual delta} \quad (2)$$

gdzie *c*, *S*, *X* mają takie same znaczenia jak we wzorach (1).

Współczynniki *theta*, *vega*, *rho_d* i *rho_f* spełniają warunek jednorodności czasu określony następująco:

$$\tau \cdot \text{theta} + \frac{1}{2} \sigma \cdot \text{vega} + r_d \cdot \text{rho}_d + r_f \cdot \text{rho}_f = 0 \quad (3)$$

gdzie σ , τ , r_d , r_f mają takie same znaczenia jak we wzorach (1).

Trzecia z prezentowanych w artykule zależności nazywana jest symetrią stóp procentowych. Jest to związek współczynników *rho_d* i *rho_f* obliczonych dla krajowej i zagranicznej stopy procentowej z czasem do wygaśnięcia opcji τ i ceną opcji *c*. Zależność ta określona jest następująco:

$$\text{rho}_d + \text{rho}_f = -\tau \cdot c \quad (4)$$

gdzie τ i *c* mają takie same znaczenia jak we wzorach (1).

W tabelach 3–5 przedstawiono na hipotetycznym przykładzie wszystkie trzy opisane wyżej zależności. Przyjęto, że $X = 5$, $r_d = 0,2$, $r_f = 0,15$, $\sigma = 0,2$. Rozpatrzono następujące sytuacje opcji kupna: *out-of-the-money* (kurs waluty *S* jest niższy niż cena wykonania opcji *X*), *at-the-money* (kurs waluty *S* jest równy cenie wykonania opcji *X*) i *in-the-money* (kurs waluty *S* jest wyższy niż cena wykonania opcji *X*). Obliczenia wykonano, uwzględniając okres trzech i sześciu miesięcy do wygaśnięcia opcji τ .

⁵ Szerzej na temat zależności między współczynnikami wrażliwości w pracy J. Hakala, U. Wystup, *Foreign Exchange Risk: Models, Instruments and Strategies*, Risk Books, London 2002, s. 3–14.

Tabela 3. Jednorodność przestrzeni dla $X = 5$, $r_d = 0,2$, $r_f = 0,15$, $\sigma = 0,2$

	<i>out-of-the-money</i> $S = 2$		<i>at-the-money</i> $S = 5$		<i>in-the-money</i> $S = 8$	
	3 miesiące	6 miesiący	3 miesiące	6 miesiący	3 miesiące	6 miesiący
Czas do wygaśnięcia τ						
<i>delta</i>	0,00	0,00	0,54	0,56	0,96	0,93
<i>dual delta</i>	0,00	0,00	-0,50	-0,49	-0,95	-0,90
$S \cdot \textit{delta} + X \cdot \textit{dual delta}$	0,00	0,00	0,22	0,32	2,95	2,90
<i>c</i>	0,00	0,00	0,22	0,32	2,95	2,90

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 4. Jednorodność czasu dla $X = 5$, $r_d = 0,2$, $r_f = 0,15$, $\sigma = 0,2$

	<i>out-of-the-money</i> $S = 2$		<i>at-the-money</i> $S = 5$		<i>in-the-money</i> $S = 8$	
	3 miesiące	6 miesiący	3 miesiące	6 miesiący	3 miesiące	6 miesiący
Czas do wygaśnięcia τ						
<i>theta</i>	-0,15	-0,10	-0,42	-0,29	-0,17	-0,05
<i>vega</i>	0,38	0,52	0,82	1,09	0,93	1,27
ρ_d	0,00	0,00	0,63	1,23	1,19	2,26
ρ_f	0,00	0,00	-0,69	-1,39	-1,93	-3,71
$\tau \cdot \textit{theta} + \frac{1}{2} \sigma \cdot \textit{vega} +$ $r_d \cdot \rho_d + r_f \cdot \rho_f$	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 5. Symetria stóp procentowych dla $X = 5$, $r_d = 0,2$, $r_f = 0,15$, $\sigma = 0,2$

	<i>out-of-the-money</i> $S = 2$		<i>at-the-money</i> $S = 5$		<i>in-the-money</i> $S = 8$	
	3 miesiące	6 miesiący	3 miesiące	6 miesiący	3 miesiące	6 miesiący
czas do wygaśnięcia τ						
ρ_d	0,00	0,00	0,63	1,23	1,19	2,26
ρ_f	0,00	0,00	-0,69	-1,39	-1,93	-3,71
$\rho_d + \rho_f$	0,00	0,00	-0,06	-0,16	-0,74	-1,45
$-\tau$	0,00	0,00	-0,06	-0,16	-0,74	-1,45

Źródło: opracowanie własne.

Podsumowanie

Umiejętność prawidłowej analizy współczynników greckich jest niezbędna przy tworzeniu różnorodnych strategii opcyjnych. Ich skuteczność jest uzależniona od prawidłowego odczytania wpływu poszczególnych parametrów na wartość opcji. Stąd też ważne jest dokładne obliczenie wartości współczynników wrażliwości. Opisanie w artykule zależności pozwalają na zweryfikowanie przeprowadzonych obliczeń, a także dzięki odpowiednim przekształceniom równań (2), (3), (4) umożliwiają szybsze obliczenie wybranych współczynników.

Literatura

- Hakala J., Wystup U., *Foreign Exchange Risk: Models, Instruments and Strategies*, Risk Books, London 2002.
- Hull J., *Kontrakty terminowe i opcje. Wprowadzenie*, WIG-PRESS, Warszawa 1999.
- Jajuga K., Jajuga T., *Inwestycje*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1998.
- Korona R.M., *Niedoceniana reszta*, „Bank” 1999, nr 7, s. 67–70.
- Stolorz B., *Analiza współczynnika rho w modelu wyceny opcji Garmana-Kohlhagena*, w: *Rynek Kapitałowy. Skuteczne Inwestowanie*, t. II, W. Tarczyński (red.), Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego, Szczecin 2007.
- Stolorz B., *Dual delta i dual gamma – współczynniki wrażliwości*, w: *Metody ilościowe w ekonomii*, J. Hozer (red.), „Studia i Prace Wydziału Nauk Ekonomicznych i Zarządzania” nr 15, Szczecin 2009.
- Stolorz B., *Szybkość, kolor i urok opcji*, w: *Metody ilościowe w ekonomii*, J. Hozer (red.), „Studia i Prace Wydziału Nauk Ekonomicznych i Zarządzania” nr 11, Szczecin 2008.
- Stolorz B., *Volga i vanna – współczynniki wrażliwości*, w: *Inwestowanie na rynku kapitałowym*, W. Tarczyński (red.), „Studia i Prace Wydziału Nauk Ekonomicznych i Zarządzania” nr 10, Szczecin 2008.
- Stolorz B., *Zomma – współczynnik wrażliwości opcji*, w: *Rola informatyki w naukach ekonomicznych i społecznych. Innowacje i implikacje interdyscyplinarne*, Z. Zieliński (red.), t. 2, Wydawnictwo Wyższej Szkoły Handlowej, Kielce 2009.

RELATIONS AMONG SENSITIVITY COEFFICIENTS IN THE GARMAN-KOHLHAGEN OPTION PRICING MODEL

Summary

Option theory often requires testing the option price sensitivity to changes of such parameters as underlying instrument prices, time to maturity, volatility and an interest rate. In mathematical terms it means the analysis of option price partial derivatives relating to these parameters. Such coefficients, known as Greeks, describe how the value of an individual risk factor changes on the assumption that all the others are constant. The most important Greeks are delta, gamma, theta, vega and rho. The aim of the paper is to present some relations among sensitivity coefficients calculated for a call option determined according to the Garman-Kohlhagen pricing model.

Translated by Beata Bieszk-Stolorz

Keywords: option, Garman-Kohlhagen pricing model, sensitivity coefficients.