UNIWERSYTET SZCZECIŃSKI
WYDZIAŁ NAUK EKONOMICZNYCH
I ZARZĄDZANIA

STUDIA I PRACE WYDZIAŁU NAUK EKONOMICZNYCH I ZARZĄDZANIA NR 36, T. 1

Stefan Grzesiak*

WYKORZYSTANIE RACHUNKU WARIACYJNEGO DO ANALIZY WAHAŃ PRODUKCJI W PRZEDSIĘBIORSTWACH

STRESZCZENIE

W artykule podjęto problem wykorzystania rachunku wariacyjnego do optymalizacji rozkładu produkcji w czasie dla określonego produktu. Zastosowanie rachunku wariacyjnego jest możliwe tylko w przypadku użycia deterministycznych modeli decyzyjnych do opisu dynamiki rozkładu produkcji. Przeanalizowano wybrane postaci analityczne funkcji kosztów produkcji, których można użyć w funkcji kryterialnej wspomnianego modelu. Dzięki takiemu podejściu można w stosunkowo prosty sposób wyznaczyć funkcje, opisujące rozkład produkcji w czasie, które jednocześnie będą minimalizować całkowite koszty produkcji.

Słowa kluczowe: rachunek wariacyjny, optymalizacja, funkcja kosztów, równanie Eulera

Wstęp

Ważnym i jednocześnie interesującym zagadnieniem jest określanie optymalnego rozkładu produkcji w czasie w przedsiębiorstwach o różnym typie produkcji. Wymaga to umiejętności konstruowania modeli decyzyjnych, charakteryzujących się odmiennymi właściwościami w zależności od parametrów jednostek gospodar-

* Adres e-mail: stegrz49@wneiz.pl

czych. Inaczej proces ten wygląda w przypadku, gdy problem analizuje się w warunkach deterministycznych, a inaczej w stochastycznych.

W warunkach pewności, zadania decyzyjne są prostsze i łatwiejsze do rozwiązania. Takie warunki są spełnione, gdy decydent jest w posiadaniu w pełni wiarygodnych informacji o kształtowaniu się parametrów modelu decyzyjnego w całym analizowanym okresie. Przede wszystkim konieczna jest wiarygodna informacja o zapotrzebowaniu na analizowany produkt w określonych momentach (przedziałach) czasu. Taką gwarancję daje z reguły podpisanie umów na dostawę z odbiorcami, ściśle określających ilość i terminy dostaw. Jest to dla firmy sytuacja zupełnie korzystna, gdyż umożliwia zamówienie z wyprzedzeniem surowców i urządzeń, niezbędnych do realizacji produkcji.

Zasadniczy wpływ na dobór metod rozwiązywania zadań programowania produkcji w czasie ma też traktowanie procesu produkcji jako dyskretnego lub ciągłego. Zależy to od typu, a także charakteru produkcji. W przypadku produkcji o charakterze masowym (potokowym) lub wielkoseryjnym możliwe staje się traktowanie jej jako procesu ciągłego. Można wtedy przyjąć, że zarówno poziom zapotrzebowania, jak i wielkość zapasów również są zmiennymi ciągłymi. Założenie o ciągłości zmiennych, opisujących produkcję, zapotrzebowanie i zapasy, stwarza możliwość wykorzystania przy rozwiązywaniu zadań programowania produkcji rachunku wariacyjnego. Taka możliwość wynika z faktu, iż rachunek wariacyjny daje szansę znalezienie funkcji opisującej optymalny rozkład produkcji w czasie. W przypadku, gdyby zastosowanie rachunku wariacyjnego było niemożliwe, można wykorzystać rachunek różniczkowy, umożliwiający znalezienie ekstremum funkcji wielu zmiennych. W efekcie otrzymuje się nie funkcję rozkładu produkcji w czasie, ale ciąg wielkości dla poszczególnych podokresów uzyskanych jako rozwiązanie układu równań normalnych. Pełny wykład podstaw rachunku wariacyjnego można znaleźć m.in. w pracy [zob. Gelfand, Fomin 1975].

Kryterium i konstrukcja modelu decyzyjnego

Jako zasadnicze kryterium przy rozwiązywaniu zadania programowania produkcji w czasie przyjęto koszty ponoszone przez przedsiębiorstwo w związku z prowadzeniem działalności produkcyjnej. Koszty te można podzielić na trzy główne kategorie:

– bezpośrednio uzależnione od skali produkcji i będące pewną funkcją jej wielkości;
– ponoszone w związku z koniecznością przechowywaniu w magazynach części niesprzedanej lub nieodebranej w danym momencie produkcji, jako pokrycie przyszłego zapotrzebowania;
– wynikające ze zbyt małej w danym momencie wielkości produkcji, stwarzającej jej niedobór, a w związku z tym pewne dodatkowe nakłady i straty.

Największe problemy stwarza kwantyfikacja kosztów niedoboru produkcji. Okresowe braki w pokryciu zapotrzebowania na określone zamówione produkty mogą generować dodatkowe koszty, wynikające z nakładanych kar umownych, konieczności nagłego zwiększenia rozmiarów produkcji i poniesienia dodatkowych kosztów (np. osobowych, z tytułu wydłużonej eksploatacji urządzeń). Częste występowanie wahań poziomu produkcji prowadzi w dłuższym czasie do nieracjonalnej eksploatacji urządzeń i zakłóceń w pracy załogi zaangażowanej w produkcję. Tym samym można uznać koszty niedoboru jako niekoniecznie proporcjonalną funkcję odchyleń pomiędzy zgłaszanym zapotrzebowaniem a rozmiarami produkcji.

Koszty magazynowania gotowych produktów najczęściej przyjmuje się jako liniową funkcję wielkości przechowywanych zapasów. Wynika to z realnego założenia, iż koszty te zawierają elementy stałe (np. utrzymanie, amortyzację, obsługę i konserwację pomieszczeń) oraz zmienne, obejmujące głównie czynności ładunkowe, konserwację zapasów produktów itp. Zasadniczą rolę pełnią jednak pierwsze wymienione kategorie kosztów.

Załóżmy, że przedsiębiorstwo produkuje masowo jeden wyrób. Zapotrzebowanie na niego w każdym momencie *t* badanego okresu jest znane i można je określić funkcją $v(t) \geq 0$. Jeżeli jako $x(t)$ określimy funkcję rozkładu produkcji w czasie, to $f\left[x(t)\right]$ będzie oznaczać funkcję opisującą zależność kosztów od wielkości produkcji w każdym momencie *t*. Przyjmując założenia o masowym charakterze produkcji jednocześnie przyjmujemy, że $x(t)$, $v(t)$ oraz poziom zapasu wytwarzanego produktu są ciągłymi funkcjami zmiennej czasowej *t*. Niech *h* oznacza jednostkowy koszt magazynowania analizowanego produktu w jednostce czasu.

Jeżeli całkowite zapotrzebowanie na analizowany produkt od początku badanego okresu określimy jako:

$$V(t) = \int_0^t v(t)\,dt \tag{1}$$

a łączną produkcję do momentu t przez:

$$X(t) = \int_0^t x(t)\,dt \tag{2}$$

to zapas produktu w dowolnym momencie t wyniesie

$$Z(t) = X(t) - V(t) + Z(0) \tag{3}$$

W tej sytuacji zadanie dynamicznego programowania produkcji w okresie $(0,T)$ da się opisać przy pomocy modelu decyzyjnego minimalizującego całkowite koszty produkcji [Lange 1967, 256]:

$$D = \int_0^T f\left[x(t)\right]dt + h\int_0^T \left[X(t) - V(t) + Z(0)\right]dt \rightarrow min \tag{4}$$

przy założeniach:

$$Z(0) \geq 0 \tag{5}$$

$$Z(t) = X(t) - V(t) + Z(0) \geq 0,\ \ 0 \leq t \leq T \tag{6}$$

$$X(t) - V(T) = Z(T) \tag{7}$$

Założenie (5) oznaczające wielkość zapasu początkowego jest oczywiste, natomiast (6) oznacza nieujemność zapasu wyrobu w każdym momencie badanego przedziału czasu, a więc przyjęcie, że nie jest możliwe uzupełnienie tego zapasu z zewnątrz. Warunek (7) definiuje końcowy stan zapasu w magazynie.

Rozważymy teraz kwestię wyboru postaci analitycznych funkcji kosztów $f\left[x(t)\right]$ w zależności od skali produkcji. Biorąc pod uwagę możliwości wykorzystania różnych formuł przy optymalizacji rozkładu produkcji w czasie, dokonano wyboru takich, których postaci umożliwiają użycie rachunku wariacyjnego do optymalizacji. Do spełniających ten warunek, a jednocześnie najczęściej spotykanych w literaturze należą:

$$K_1(t) = a_2x^2(t) + a_1x(t) + a_0 \tag{8}$$

$$a_2 > 0, a_2 \geq 0, a_0 \geq 0 \tag{9}$$

$$K_2(t) = b_3x^3(t) - b_2x^2(t) + b_1x(t) + b_0 \tag{10}$$

$$b_3 > 0,\ \ b_2 \geq 0,\ b_1 \geq 0, b_0 \geq 0 \tag{11}$$

$$K_3(t) = \alpha x^{\beta}(t) + \gamma \tag{12}$$

$$\alpha > 0, \beta > 1, \gamma \geq 0 \tag{13}$$

$$K_4(t) = \alpha x^{0,5}(t) + \beta \tag{14}$$

$$\alpha > 0, \beta \geq 0 \tag{15}$$

$$K_5(t) = \frac{\alpha x(t)\left[x(t) + \beta\right]}{\left[x(t) + \gamma\right]} + \lambda \tag{16}$$

$$\alpha > 0, \beta \geq 0, \gamma > 0, \lambda \geq 0, \beta \neq \gamma \tag{17}$$

$$K_6(t) = \alpha e^{\beta x(t)} \tag{18}$$

$$\alpha > 0, \beta > 0 \tag{19}$$

gdzie *a, b, c* oraz $,\alpha, \beta, \gamma, \lambda$ – stałe parametry.

Niektóre z wymienionych postaci funkcji kosztów proponowano w pracy [Barczak 1971, 37]. Przedstawione postaci funkcji zostały wybrane głównie ze względu na możliwość ich wykorzystania przy określaniu optymalnego rozkładu produkcji w czasie z użyciem rachunku wariacyjnego. Zgodnie z tym każda z funkcji kosztów musi posiadać rosnący krańcowy koszt produkcji oraz dodatnią druga pochodną.

Z tego względu nie proponowano innych funkcji o zbyt skomplikowanych postaciach analitycznych lub też np. funkcji liniowej, której nie da się w takim przypadku wykorzystać. W sytuacji, gdy przedsiębiorstwo produkuje wiele wyrobów, należałoby oczywiście stworzyć je odrębnie dla każdego produktu.

Idea i wykorzystanie rachunku wariacyjnego

Jednym z klasycznych zagadnień rachunku wariacyjnego jest wyznaczenie funkcji $X(t)$, dla której całka

$$I = \int_a^b \left[X(t), X'(t), t\right] dt \to min \tag{20}$$

gdzie $X'(t)$ jest pochodną $X(t)$, osiąga minimum, a zapis ten nazywany jest funkcjonałem. Funkcję kryterialną (4) da się przedstawić [Lange 1967, 261–262] w postaci (20). Rozwiązanie zadania (20) polegać będzie na znalezieniu ekstremum funkcjonału. Poszukuje się go analogicznie, jak w przypadku ekstremum zwykłej funkcji $y = f(x)$.

Funkcja $X(t)$ zastąpiona zostanie przez przekształconą funkcję $X(t) + \delta X(t)$. Element $\delta X(t)$ nazwiemy wariacją funkcji $X(t)$. Wstawienie zamiast $X(t)$ wielkości $X(t) + \delta X(t)$ zmienia wartość funkcjonału (20). Jego nową wartość oznaczymy przez $J + \delta J$. W sytuacjach, gdy $\delta J > 0$, lub $\delta J < 0$, funkcjonał (20) nie posiada ekstremum. Jeżeli $\delta J = 0$, wtedy ten funkcjonał posiada ekstremum. Istotne jest, że ustalając warunek istnienia ekstremum funkcji $y = f(x)$ należy zmienić argument funkcji, natomiast przy badaniu ekstremum funkcjonału wartość argumentu *t* nie ulega zmianie.

Przyjmując, że $X(t)$ oraz x $\delta X(t)$ mają pierwsze i drugie pochodne ciągłe względem *t*, nowy funkcjonał da się zapisać:

$$J + \delta J = \int_a^b F\left[X(t) + \delta X(t); X'(t) + \delta X'(t); t\right] dt \tag{21}$$

Przy założeniu, że $\delta X(t) \to 0$, obliczymy teraz δJ dla ustalonego *t*:

$$\delta J = \int_a^b \frac{\partial F}{\partial X} \delta X(t)\, dt + \int_a^b \frac{\partial F}{\partial X'} \delta X'(t)\, dt \tag{22}$$

Wykorzystując wyrażenie (22) zapiszemy warunek, jaki należy spełnić, aby wariacja funkcjonału była równa zeru:

$$\delta J = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial X} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial X'} \right] \delta X(t)\, dt = 0 \tag{23}$$

Ponieważ δJ musi być równa zero dla każdego $\delta X(t)$, stąd $\delta J = 0$, gdy wyrażenie w nawiasie kwadratowym w (23) równa się zero:

$$\frac{\partial F}{\partial X} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial X'} = 0 \tag{24}$$

Jest to tzw. równanie różniczkowe Eulera, którego rozwiązanie pozwala na otrzymanie funkcji $X(t)$, sprowadzającej do minimum funkcjonał *J*.

Wyrażenie (24) wykorzystano do znajdowania funkcji, opisujących rozkład produkcji w czasie. Zauważmy, że $x(t) = X'(t)$, a $V(t)$ i $Z(0)$ są dane i nie ulegają zmianie. Odnosząc równanie (24) do warunku istnienia ekstremum funkcjonału (20) przy przyjęciu granic całkowania (*a* = 0*, b* =*T)* otrzymujemy:

$$\frac{\partial F}{\partial X} = h \text{ oraz } \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial X'} = \frac{d}{dt} f'\left[x(t)\right]$$

Równanie Eulera (24) zapiszemy więc w postaci:

$$h - \frac{d}{dt} f''\left[x(t)\right] = 0 \text{ lub } x'(t) = \frac{h}{f''\left[x(t)\right]} \tag{25}$$

Warunek (25) wskazuje, że dla minimalizacji funkcji rozkładu produkcji w czasie, koszt magazynowania powinien być równy zmianie (przyrostowi) kosztu krańcowego, wynikającego ze zmiany rozkładu produkcji w czasie.

Przeanalizujemy teraz, jakie postaci będą mieć funkcje rozkładu produkcji w czasie w zależności od przyjętej w funkcji celu postaci funkcji kosztów. W tym celu wykorzystamy równanie Eulera (25), aby znaleźć odpowiednie postaci biorąc pod uwagę zadanie decyzyjne (4)-(7).

Jeżeli funkcja kosztów ma postać (8), równanie różniczkowe Eulera można zapisać:

$$x'(t) = 0,5ha_2^{-1}.$$

Stąd po wykonaniu operacji całkowania:

$$x(t) = \frac{0,5h}{a_2} t + m \tag{26}$$

Jeżeli $f\left[x(t)\right]$ jest wielomianem 3-ego stopnia typu (10), wtedy równanie Eulera ma postać:

$$\frac{dx(t)}{dt} = h\left[6b_3 - 2b_2\right]^{-1} \tag{27}$$

Przekształcamy (27) do postaci, a następnie całkujemy obustronnie uzyskując:

$$3b_3\left[x(t)\right]^2 - 2b_2 x(t) = ht + p$$

gdzie *p* – stała całkowania.

Uzyskane równanie traktujemy jako trójmian kwadratowy względem $x(t)$ i otrzymujemy dwa rozwiązania:

$$x_1(t) = 0,33b_3^{-1}\left[b_2^2 + 3b_3(ht+p)\right]^{0.5} + 0,33b_2b_3^{-1}$$

$$x_2(t) = 0,33b_2b_3^{-1} - 0,33b_3^{-1}\left[b_2^2 + 3b_3(ht+p)\right]^{0.5}$$

Zakładając, że funkcja $f[x(t)]$ ma postać opisaną wzorem (12), równanie Eulera zapiszemy:

$$\frac{dx(t)}{dt} = h\left[\alpha\beta(\beta-1)\right]^{-1}\left[x(t)\right]^{2-\beta} \tag{28}$$

Wtedy po wymnożeniu obu stron przez $\left[x(t)\right]^{\beta-2} dt$ i podstawieniu $r = h\left[\alpha\beta(\beta-1)\right]^{-1}$ całkujemy obustronnie uzyskując:

$$(\beta-1)^{-1}\left[x(t)\right]^{\beta-1} = rt + R$$

gdzie R – stała całkowania.

Ostatecznie otrzymujemy funkcję:

$$x(t) = \left[(\beta-1)(rt+R)\right]^{\frac{1}{\beta-1}} \tag{29}$$

Jeżeli funkcja $f[x(t)]$ będzie mieć postać (14), wtedy równanie Eulera ma postać:

$$\frac{dx(t)}{dt} = -4h\alpha^{0,5}\left[x(t)\right]^{1,5} \tag{30}$$

Po podstawieniu $w = 4h\alpha^{-0,5}$ całkujemy równanie

$\left[x(t)\right]^{-1,5} dx(t) = -wdt$, uzyskując ostatecznie:

$$x(t) = 4(wt+W)^{-2}$$

gdzie W – stała całkowania (31)

Dla funkcji $f[x(t)]$ w postaci (16) równanie różniczkowe Eulera przyjmie postać:

$$\frac{dx(t)}{dt} = 0,5h\left[\alpha\gamma(\gamma-\beta)\right]^{-1}\left[x(t)+\gamma\right]^{3} \tag{32}$$

Po podstawieniu $q = 0,5h\left[\gamma(\gamma-\beta\right]^{-1}$ i odpowiednim przekształceniu otrzymujemy $\left[x(t)+\gamma\right]^{-3} dx(t) = qdt$. Po całkowaniu obu stron można zapisać następujące równanie:

$$\left[x(t)+\gamma\right]^{-2} = -2\left(qt+Q\right)$$

gdzie Q – stała całkowania.

Ostatecznie funkcja rozkładu produkcji w czasie będzie miała postać:

$$x(t) = \left[-2\left(qt+Q\right)\right]^{-0,5} - \gamma \tag{33}$$

Ostatnia postać $f\left[x(t)\right]$ opisana funkcją (18) generuje równanie Eulera w postaci

$$\frac{dx(t)}{dt} = h\alpha^{-1}\beta^{-2}exp\left[-\beta x(t)\right] \tag{34}$$

Jeżeli podstawimy $s = h\alpha^{-1}\beta^{-2}$, to mnożąc odpowiednio obie strony mamy:

$$exp\left[\beta x(t)\right]dx(t) = sdt$$

Po obustronnym całkowaniu tego równania otrzymujemy:

$$\beta^{-1}exp\left[\beta x(t)\right] = st+S \text{ lub } exp\left[\beta x(t)\right] = \beta\left(st+S\right)$$

gdzie *S* – stała całkowania.

Po zlogarytmowaniu obu stron ostatecznie uzyskujemy:

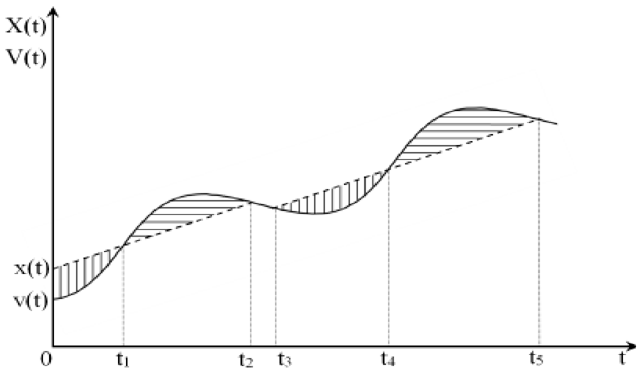
$$x(t) = \beta^{-1}ln\left[\beta\left(st+S\right)\right] \tag{35}$$

Rozważymy teraz dokładniej przypadek opisany kwadratową funkcją kosztów typu (8). Funkcja rozkładu produkcji jest w takim przypadku rosnącą funkcją liniową, której nachylenie jest uzależnione od kosztu magazynowania i parametru przy $x^2(t)$. Wyraz wolny *m* jest zależny od warunków (6) i (7) zadania wyjściowego. Wielkość produkcji w okresie (*0, t*) można więc wyznaczyć:

$$X(t) = \int_0^t (\frac{h}{2a_2}t + m)dt = \frac{h}{4a_2}t^2 + mt + n \tag{36}$$

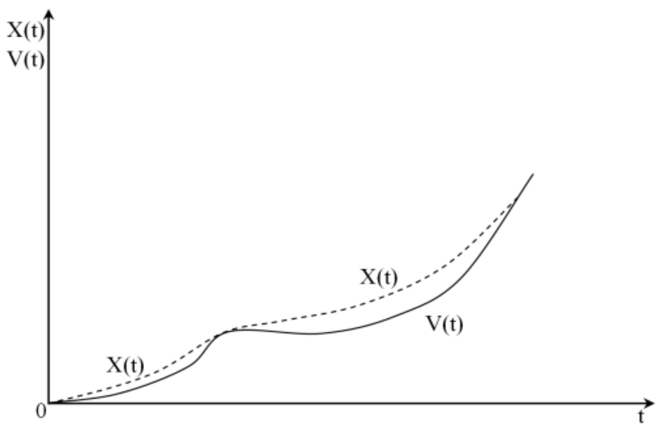
Na rys. 1 przedstawiono kształtowanie się produkcji w zależności od ustalonego zapotrzebowania. Przyjmując $Z(0) = 0$ w momencie $t = 0$, należy przez pewien czas produkować powyżej zapotrzebowania, tworząc zapas. W okresie (t_1,t_2) zapas ulega likwidacji aż do przecięcia się prostej $x(t)$ i krzywej $v(t)$. Przez pewien czas produkcja równa się zapotrzebowaniu, a następnie znów wzrasta. Odcinek prostej $x(t)$ jest tu obniżony, a więc cały przebieg $x(t)$ składa się z szeregu odcinków prostej oraz pewnych części, dla których $x(t) = v(t)$. Przebieg produkcji jest zatem bardziej wygładzony, niż krzywa zapotrzebowania.

Rys.1.



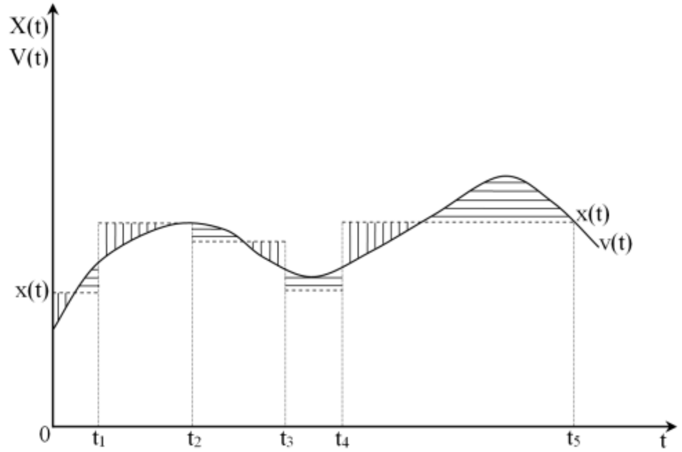
Na rys. 2 przedstawiono krzywe $X(t)$ i $V(t)$ dla prezentowanego przykładu. $X(t)$ jest funkcją typu (36). Założenie (6) o nieujemności zapasu powoduje, że linia $X(t)$ jest zawsze powyżej $V(t)$, a jedynie na niektórych odcinkach się z nią pokrywa dla *Z(0) = 0*.

Rys. 2.



Sprawdzimy jeszcze, jaki będzie efekt, gdy założymy, że koszt magazynowania *h* wyniesie zero. Wtedy $x'(t) = 0$, czyli funkcja rozkładu produkcji w czasie będzie stałą – prostą równoległą do osi *t*. Poziom produkcji będzie taki sam aż do momentu wyczerpania zapasu. Potem ulegnie przesunięciu w górę lub dół, w zależności od krzywej zapotrzebowania (rys. 3).

Rys. 3.



Wynika to z założenia, że w każdym momencie zapas produktu musi być nieujemny. Przedstawiona na rys. 3 krzywa $x(t)$ nie jest jedną linią ciągłą, ale jest ciągła w przedziałach, których długość zależy od kształtu krzywej zapotrzebowania.

Podsumowanie

Przedstawione w artykule rozważania wskazują, że w zależności od postaci funkcji kosztów można mieć do czynienia z różnymi formami optymalnego rozkładu produkcji w czasie. Zasadniczy problem sprowadza się więc do tego, aby każdorazowo dla produkowanego wyrobu ustalić właściwą funkcję kosztów, spełniającą podane warunki, a wtedy przy użyciu rachunku wariacyjnego znaleźć najlepszą funkcję rozkładu produkcji. Taki scenariusz jest możliwy pod warunkiem, że produkcja określonych wyrobów ma charakter masowy, a problem analizuje się w warunkach deterministycznych. Przy innym typie produkcji (np. w produkcji krótkoseryjnej lub jednostkowej) albo w warunkach stochastycznych nie jest możliwe zastosowanie prezentowanego podejścia.

Literatura

Barczak A. (1971), *Ekonometryczne metody badania kosztów produkcji*, PWN, Warszawa.
Gelfand M., Fomin S.W. (1975), *Rachunek wariacyjny*, PWN, Warszawa.
Lange O. (1967), *Optymalne decyzje*, PWN, Warszawa.

ANALYSIS OF PRODUCTION FLUCTUATION IN ENTERPRISES WITH USE OF VARIATION CALCULATIONS

Abstract

The subject of the article is a use of variation calculations to optimize production time-table for the specific product. Use of variation calculations is possible only in case of using a deterministic decision-making model for description of dynamics of production time-table. In the article were analyzed selected analytical forms of functions of the production cost, which can be used in the criteria function in the model mentioned above. Through such approach the functions that describe production time-table can be designated in relatively easy way. These functions will simultaneously minimize total cost of production.

Translated by Mateusz Grzesiak

Key words: variation calculations, optimization, cost function, Euler's equation
JEL Code: C61, C65